www.raves.nl
ton@raves.nl

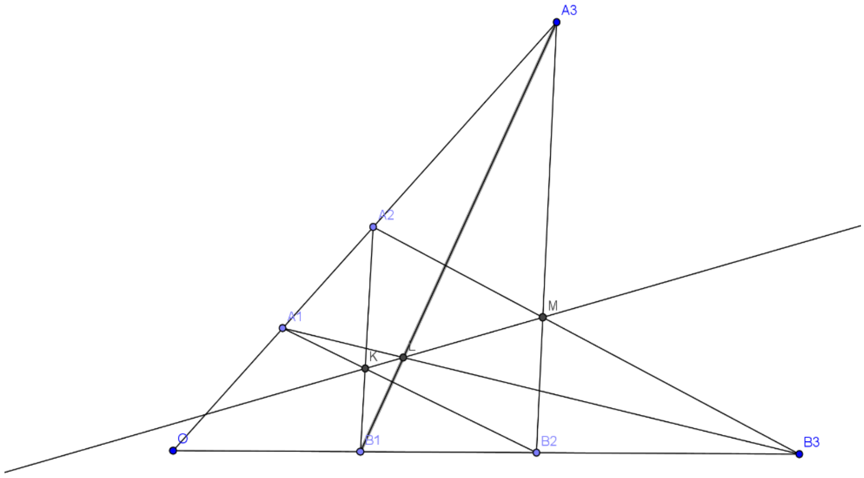
DE STELLING VAN PAPPOS . . . . EEN NIEUW BEWIJS!

NIEUW

De stelling van Pappos is niet nieuw; het bewijs ervan door louter met cartesische coördinaten te werken – dus zuiver algebraïsch – is wel “nieuw”!

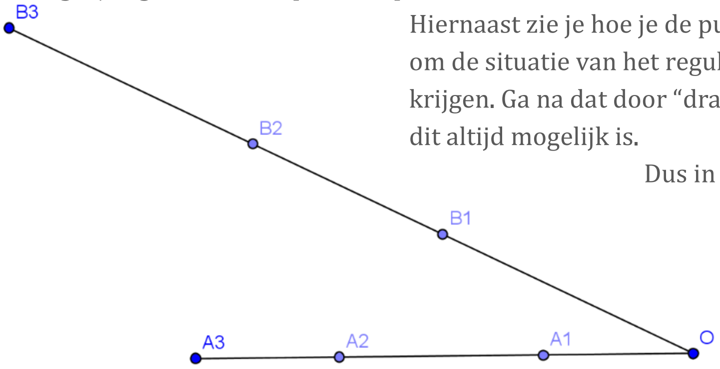
Wat is de stelling van Pappos? Dat zie je in de figuur hieronder.... Als 3 punten A_1, A_2, A_3 op een lijn l liggen en 3 punten B_1, B_2 en B_3 op een andere lijn k liggen–beide drietallen van links naar rechts geordend- dus met A_1 links; A_2 in het midden en A_3 rechts (evenzo voor B_1 links; B_2 in het midden en B_3 rechts) en men snijdt de lijnen A_1B_2 met A_2B_1 (noem het snijpunt K) en ook de lijnen A_1B_3 met A_3B_1 (snijpunt L) dan zal het snijpunt M van A_2B_3 met A_3B_2 op lijn KL liggen.

GEVAL 1



SNIJDENDE LIJNEN

Als de 6 punten op 2 snijdende lijnen liggen kiezen we de Oorsprong O(0,0) precies in het snijpunt van de twee lijnen k en l. Dan kunnen we voorts B_1 zo kiezen dat de x-coördinaat exact 1 is. Dan zijn de coördinaten van de 6 punten B_1 (1,0); B_2 (b,0); B_3 (c,0) en
A_1 (t, at); A_2 (s, as) en A_3 (r, ar) omdat deze punten liggen op een lijn $y = ax$ met $a \neq 0$
Verder is er de aanname dat A_2 boven A_1 ligt en A_3 weer boven A_2 .
Dit betekent $r > s > t$.
Iets soortgelijks geldt voor de punten op de horizontale as: $1 < b < c$



Hiernaast zie je hoe je de punten moet noemen om de situatie van het reguliere geval weer te krijgen. Ga na dat door “draaien of verwisselen” dit altijd mogelijk is.

Dus in elk geval: $t > 0$

WAT ALS…?

En als wel geldt: a = 0 ?..... Dat kan niet want dan liggen alle 6 punten op één lijn.
Wat wel kan is de situatie dat lijn l **verticaal** loopt en er dus niet een vergelijking geldt zoals y = ax maar een vergelijking van de vorm x = 0 (de y-as !)
In deze situatie zouden de coördinaten zijn: $A_1(0, t)$; $A_2(0, s)$ en $A_3(0, r)$ met r > s > t
Je kunt dan de lijnen zo noemen dat t > 0 geldt (anders de lijnen k en l verwisselen)
Dit geval is veel simpeler dan het reguliere geval en wordt achteraan verder * besproken.
In elk geval is het mogelijk om punt B_1 op (1,0) te kiezen ...kwestie van “inzoomen”!

REGULIERE GEVAL

Nog eens op een rijtje: met a≠0 en 1 < b < c en r > s > t > 0 hebben we
$A_1(t,at)$; $A_2(s,as)$; $A_3(r,ar)$ en
$B_1(1,0)$; $B_2(b,0)$; $B_3(c,0)$

lijnen A_1B_2 : $y = \frac{at}{t-b} \cdot (x-b)$ mits t ≠ b dus niet-verticaal **

A_2B_1 : $y = \frac{as}{s-1} \cdot (x-1)$ mits s ≠ 1 dus (ook) niet verticaal ***

gelijkstellen levert: $a \cdot \frac{t}{t-b} \cdot (x-b) = a \cdot \frac{s}{s-1} \cdot (x-1)$ en we delen allereerst de a weg! Dan geldt: $\frac{tx-bt}{t-b} = \frac{sx-s}{s-1}$ ... en na kruiselings vermenigvuldigen:

$stx - tx - bst + bt = stx - bsx - st + bs$ ...links en rechts verdwijnen stx en mits bs ≠ t :

$x = \frac{bst-st+bs-bt}{bs-t} = x_K$ en de bijbehorende y-coördinaat y_K =

$$\frac{as}{s-1} \cdot \left(\frac{bst-st+bs-bt}{bs-t} - \frac{bs-t}{bs-t}\right) = \frac{as}{s-1} \cdot \left(\frac{bt(s-1)-t(s-1)}{bs-t)}\right) = \frac{abst-ast}{bs-t}$$

hierbij is $\left.\begin{matrix} b > 1 \\ s > t \\ alle\ positief \end{matrix}\right\}$ dus $bs > t$ .....kortom aan de “mits” wordt voldaan

Nu de lijnen A_1B_3: $y = \frac{at}{t-c} \cdot (x-c)$ en A_3B_1 : $y = \frac{ar}{r-1} \cdot (x-1)$ ... gelijkstellen en de a weer weglaten: $\frac{tx-tc}{t-c} = \frac{rx-r}{r-1}$ en na kruiselings vermenigvuldigen:

$rtx - tx - crt + ct = rtx - crx - rt + rc$ geeft $x_L = \frac{crt-ct-rt+cr}{cr-t}$ en

weer met vervanging van 1 door een breuk, ditmaal: $\frac{cr-t}{cr-t}$ krijgt men

$$y = \frac{ar}{r-1} \cdot \left(\frac{crt-ct-rt+cr}{cr-t} - 1\right) = \frac{ar}{r-1} \cdot \left(\frac{crt-ct-rt+t}{cr-t}\right) = \ldots = \frac{acrt-art}{cr-t} = y_L$$

ook hierbij is aan de “mits”voldaan $\left.\begin{matrix} c > 1 \\ r > t \\ alle\ positief \end{matrix}\right\}$ dus product $cr > t \cdot 1$

Nu het derde paar: A_2B_3: $y = \frac{as}{s-c} \cdot (x-c)$ en A_3B_2: $\frac{ar}{r-b} \cdot (x-b)$ gelijkstellen

en de a weer weglaten: $\frac{sx-cs}{s-c} = \frac{rx-br}{r-b}$ ...kruiselings vermenigvuldigen:

$rsx - bsx - csr + bcs = rsx - crx - brs + brc$ geeft: $x_M = \frac{crs-bcs-brs+bcr}{cr-bs}$

en ook hier is aan de “mits”voldaan met $\left\{\begin{matrix} c > b \\ r > s \\ alle\ positief \end{matrix}\right.$ dus product: $c\,r > bs$

en $y = \frac{ar}{r-b} \cdot \left(\frac{crs-bcs-brs+bcr}{cr-bs} - b\right) = \frac{ar}{r-b} \cdot \left(\frac{cs\cdot(r-b)-bs(r-b)}{cr-bs}\right) =$
$= \frac{acrs-abrs}{cr-bs} = y_M$

De lijn door K en L heeft richtingscoëfficiënt $m = \frac{y_K - y_L}{x_K - x_L}$ en vgl: $y - y_K = m \cdot (x - x_K)$

mits $x_K - x_L \neq o$ In dat speciale geval is lijn KL verticaal –zie verderop****

met m = $\dfrac{\frac{abst-ast}{bs-t} - \frac{acrt-art}{cr-t}}{\frac{bst-st+bs-bt}{bs-t} - \frac{crt-ct-rt+cr}{cr-t}} = \ldots\ldots =$

$$\frac{abcrst-abstt-acrst+astt-abcrst+acrtt+abrst-artt}{bcrst-bstt-crst+stt+bcrs-bst-bcrt+btt-bcrst+crtt+bcst-ctt+brst-rtt-bcrs+crt} =$$

Nog verder vereenvoudigen (t boven en onder wegdelen) van m heeft weldegelijk zin:

$$m = \boldsymbol{a} \cdot \frac{-bst - crs + st + crt + brs - rt}{-bst - crs + st - bs - bcr + bt + crt + bcs - ct + brs - rt + cr}$$

$\cancel{m} = \dfrac{-bst-crs+st+crt+brs-rt}{-bst-crs+st-bs-bcr+bt+crt+bcs-ct+brs-rt+cr}$ de m *waaruit* a *is weg gedeeld*

Nu controleren of M op lijn KL ligt:

$$a \cdot \frac{crs-brs}{cr-bs} - a \cdot \frac{bst-st}{bs-t} = m \cdot \left(\frac{crs-rs+bcs-bcr}{cr-bs} - \frac{bst-st+bs-bt}{bs-t}\right)$$

Vermenigvuldigen met $(cr-bs)(bs-t)$ links en rechts en de a weglaten geeft:

$(crs - brs) \cdot (bs - t) - (cr - bs) \cdot (bst - st) =$

$= \cancel{m} \cdot ((crs - bcs - brs + bcr) \cdot (bs - t) - (bst - st + bs - bt) \cdot (cr - bs))$

dus: $bcrss - crst - bbrss + brst - bcrst + crst + bbsst - bsst =$

$\cancel{m} \cdot (brss - crst - bbcss + bcst - bbrss + brst + bbcrs - bcrt - bcrst + bbsst + crst - bsst - bcrs + bbss + bcrt - bbst)$

vereenvoudigd: $bcrss - bbrss + brst - bcrst + bbsst - bsst =$

$\cancel{m} \cdot (brss - bbcss + bcst - bbrss + brst + bbcrs - bcrst + bbsst - bsst - bcrs + bbss + -bbst)$

Uit deze beide delen kan de factor $\boldsymbol{bs}$ weggedeeld worden en vind je:

$crs - brs + rt - crt + bst - st =$

$\cancel{m} \cdot (crs - bcs + ct - brs + rt + bcr - crt + bst - st - cr + bs - bt)$

Nu gaan we links en rechts met de noemer van $\cancel{m}$ vermenigvuldigen; raken $\cancel{m}$ kwijt en zie je twee tekstvakken ....eerst het linkerlid:

$$\boxed{(crs - brs + rt - crt + bst - st) \cdot (-bst - crs + st - bs - bcr + bt + crt + bcs - ct + brs - rt + cr)}$$

dan het rechterlid:

$$\boxed{(-bst - crs + st + crt + brs - rt) \cdot (crs - bcs + ct - brs + rt + bcr - crt + bst - st - cr + bs - bt)}$$

En als je goed kijkt dan zie je identieke factoren.....

Als je dit vereenvoudigen niet doet en je blijft doorgaan dan krijg je links en rechts 72 termen, die "achteraf" identiek blijken. Voorwaar een hele klus!

* verticaal

Als l zelf verticaal is (de y-as dus) en k de x-as vormt hebben we een speciale situatie met $A_1(0,t)$; $A_2(0,s)$ en $A_3(0,r)$ en $B_1(1,0)$; $B_2(b,0)$ en $B_3(c,0)$
verder is het zo te kiezen (evt. assen verwisselen) dat r > s > t > 0 en c > b > 1

A_1B_2 wordt dan $y = t - \frac{t}{b}x$ en A_2B_1: $y = s - sx$ en gelijkstellen levert:

$x_K = \frac{bs-bt}{bs-t}$ en $y_K = t - t \cdot \frac{s-t}{bs-t} = \frac{bst-st}{bs-t} = \frac{bst-st}{bs-t}$

A_1B_3 wordt dan $y = t - \frac{t}{c}x$ en A_3B_1: $y = r - rx$ gelijkstellen:

$x_L = \frac{cr-ct}{cr-t}$ en $y_L = r - r \cdot \frac{cr-ct}{cr-t} = \frac{crr-rt-crr+crt}{cr-t} = \frac{crt-rt}{cr-t}$

Nu het derde paar A_2B_3: $y = s - \frac{s}{c}x$ en A_3B_2: $y = r - \frac{r}{b}x$

gelijkstellen: $x_M = \frac{bcr-bcs}{cr-bs}$ en $y_M = \ldots\ldots = \frac{crs-brs}{cr-bs}$

Nu kijken of M op lijn KL ligt:

$$\frac{crs-brs}{cr-bs} - \frac{bst-st}{bs-t} = m \cdot \left(\frac{bcr-bcs}{cr-bs} - \frac{bs-bt}{bs-t}\right)$$

hierbij is $m = \frac{y_K - y_L}{x_K - x_L} = \frac{\frac{bst-st}{bs-t} - \frac{crt-rt}{cr-t}}{\frac{bs-bt}{bs-t} - \frac{cr-ct}{cr-t}} = \ldots.$

$= \frac{-crs-bst+st+brs+crt-rt}{-bcr-bs+bt+bcs+cr-ct}$ (hierbij is vereenvoudigd en t boven/onder weggedeeld)

Het linker- en rechterlid worden voorts met $(bs-t)(cr-bs)$ vermenigvuldigd en we krijgen links met bs weg te delen::

$bcrss - bbrss - crst + brst - bcrst + crst + bbsst - bsst =$ en rechts:

$m \cdot (bbcrs - bbcss - bcrt + bcst - bcrs + bcrt + bbss - bbst)$ en bs weg:

$crs - brs + rt - crt + bst - st = m \cdot (bcr - bcs + ct - cr + bs - bt)$

en nu vermenigvuldigen we links en rechts met de noemer van m

Links krijgen we:

$(crs - brs + rt - crt + bst - st) \cdot (-bcr - bs + bt + bcs + cr - ct) =$

$(bcr - bcs + ct - cr + bs - bt) \cdot (-crs - bst + st + brs + crt - rt$ (rechts)

En je ziet de identieke factoren weer!!!

Nu nog de "mitsen"

zoals eerder: cr-bs > 0 en bs –t > 0, omdat $\begin{cases} c > b > 1 \\ r > s > 0 \end{cases}$ en $\begin{cases} b > 1 \\ s > t \end{cases}$

Evenzo: cr-t > 0 . . . .

Wat als in het reguliere geval: lijn A_1B_2 , of A_2B_1 verticaal loopt . . . .

Of **nog minder aannemelijk** (met *l* zelf al verticaal!) kan lijn *KL* in dit speciale geval verticaal lopen? In dat geval geldt: $x_K = x_L$ en $\frac{bs-bt}{bs-t} = \frac{cr-ct}{cr-t}$

en na kruiselings vermenigvuldigen:

$$bcrs - bcrt - bst + btt = bcrs - bcst - crt + ctt$$

Steeds als het er hopeloos uitziet verdwijnen er gelijke termen en kun je iets buiten haakjes halen zodat de gevreesde kwadraten verdwijnen…

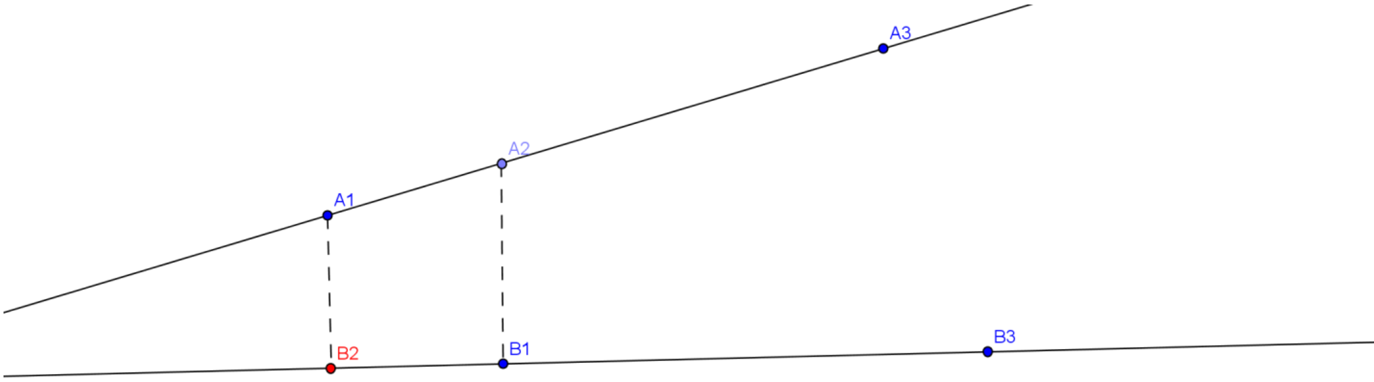
$$t \cdot (-bcr - bs + bt) = t \cdot (-bcs - cr + ct) \text{ dus}$$
$$-bcr - bs + bt = -bcs - cr + ct$$

Als je ongeveer 23 regels boven kijkt dan zie je daar (binnen m) de noemer dan nul worden en (ook) dat klopt als een bus!

Wat we nu moeten aantonen is dat $x_M = x_K$
(K; L en M op een verticale lijn).
Welnu: $\frac{bcr-bcs}{cr-bs} = \frac{bs-bt}{bs-t}$ eerst links/rechts de b wegwerken:
$\frac{cr-cs}{cr-bs} = \frac{s-t}{bs-t}$
kruiselings vermenigvuldigen:
$bcrs - bcss - crt + cst = crs - crt - bss + bst$
het leek weer hopeloos maar na verdwijnen van crt kunnen we links en rechts de s wegdelen: $bcr - bcs + ct = cr - bs + bt$ en dit is volkomen gelijkwaardig met wat een dozijn regels hierboven staat:

$$-bcr - bs + bt = -bcs - cr + ct$$

Weer een uitzonderingsgeval bewezen!
Tja, maar als **in het reguliere geval** nou een verticale lijn voorkomt:
bijvoorbeeld: A_1B_2……
Welnu dan wordt het hele verhaal wat korter, maar in wezen blijft het gelijk.
Als A_1 boven B_1 ligt dan geldt: $t = b$ en moeten we de verticale lijn $x = b$ snijden met A_2B_1: $y = \frac{as}{s-1} \cdot (x-1)$ mits $s \neq 1$
Laten we maar meteen beginnen met die "mits" !!!
Als *t=b en s=1* dan zou A_2 boven B1 liggen en tevens A_1 boven B_2
dus met $t < s$ wordt dan $b < 1$
En dat is in tegenspraak met de aanname…
hieronder zie je de meetkundige betekenis.



We gaan verder met $x_K = b = t$ en $y_K = \frac{abs-as}{s-1}$
A_1B_3: $y = \frac{at}{t-c} \cdot (x-c)$ mits $t \neq c$ of aangezien $t = b$
$y = \frac{at}{b-c} \cdot (x-c)$ of gelijkwaardig…. Merk op dat er geen "mits" is: b<c
A_3B_1: $y = \frac{ar}{r-1} \cdot (x-1)$ Kan $r = 1$ worden? Nee, want $r > t$; $t=b$ en b > 1
gelijkstellen : $\frac{atx-act}{b-c} = \frac{arx-ar}{r-1}$ kruiselings vermenigvuldigen:
$artx - acrt - atx + act = abrx - abr - acrx + acr$ is gelijkwaardig met: $rtx - crt - tx + ct = brx - br - crx + cr$ en omdat $t = b$
$x = \frac{crt-ct-br+cr}{cr-t}$ of: $x = \frac{crt-ct-rt+cr}{cr-t}$ en dit is weer de x_L van pagina 2!
De hele rest van het verhaal gaat verder zoals in het reguliere geval.

Het enige dat ons rest is t zien wat er gebeurt als lijn KL in het reguliere geval verticaal is….

Dan is de noemer van de richtingscoëfficiënt (***m***) nul:

$-bst - crs + st - bs - bcr + bt + crt + bcs - ct + brs - rt + cr = 0$

Lijn KL is verticaal dus moet $x_M = x_K$ .....

$$\frac{crs - bcs - brs + bcr}{cr - bs} = \frac{bst - st + bs - bt}{bs - t}$$

links: $(bs - t) \cdot (\, crs - bcs - brs + bcr) =$

$bcrss - bbcss - bbrss + bbcrs - crst + bcst + brst - bcrt =$

$bcrst - crst + bcrs - bcrt - bbsst + bsst - bbss + bbst$

Er valt weer wat weg en in wat overblijft:

$bcrss - bbcss - bbrss + bbcrs + bcst + brst =$

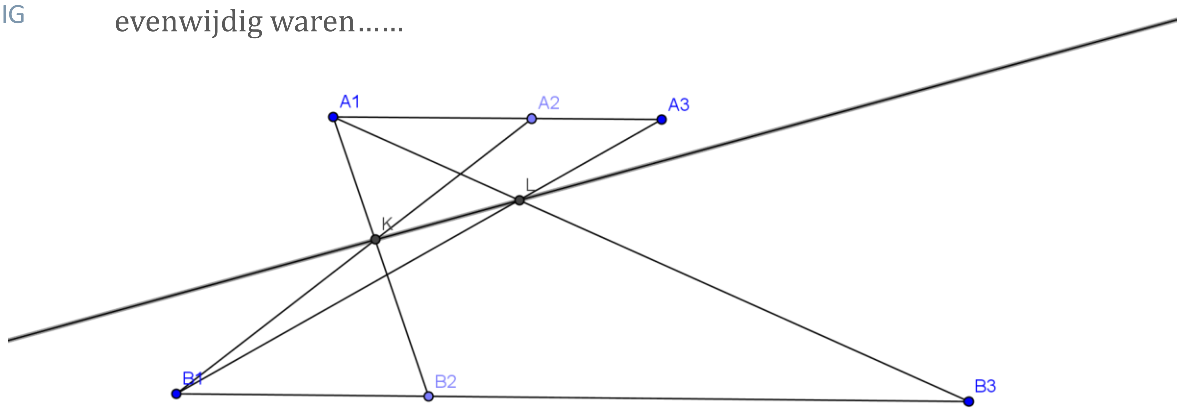
$bcrst + bcrs - bbsst + bsst - bbss + bbst$ delen we bs weg:

crs-bcs-brs+bcr+ct+rt=crt+cr-bst+st-bs+bt

En je ziet het: dit is volkomen gelijkwaardig met de 4e regel!!!

LIJNEN EVENWIJDIG

Als laatste geval wil ik nog doorspitten wat er gebeurt als de twee lijnen k en l evenwijdig waren……



We nemen weer $B_1(1,0)$; $B_2(b,0)$ en $B_3(c,0)$ "onder" $A_1(t,q)$; $A_2(s,q)$ en $A_3(r,q)$ . . . .uiteraard met $q \neq 0$

En we beginnen vol goede moed met A_1B_2 : $y = \frac{q}{t-b} \cdot (x - b)$ en A_2B_1: $y = \frac{q}{s-1} \cdot (x - 1)$

"gelijkstellen": *mits* $t \neq b$ *en* $s \neq 1$: . . . $x_K = \frac{bs-t}{s-t+b-1}$ en $y_K = \ldots = \frac{bq-q}{s-t+b-1}$

Nu A_3B_1: $y = \frac{q}{r-1} \cdot (x - 1)$ en A_1B_3 : $y = \frac{q}{t-c} \cdot (x - c)$ mits $t \neq c$ en $r \neq 1$ gelijkstellen:

$(r - 1)(x - c) = (t - c)(x - 1)$ geeft: $x_L = \frac{cr-t}{r-t+c-1}$ en reken maar na: . . . . $y_L = \frac{cq-q}{r-1+c-t}$

Als laatste A_3B_2 en A_2B_3 geeft: . . . $x_M = \frac{cr-bs}{c-s+r-b}$ en . . . : $y_L = \frac{cq-bq}{c-s+r-b}$ mits . . . .

We maken weer de lijn door K en L : $y - y_K = m \cdot (x - x_K)$ met (mits. . . .)

$$m = \frac{\dfrac{bq - q}{s - 1 + b - t} - \dfrac{cq - q}{s - 1 + b - t}}{\dfrac{bs - t}{s - 1 + b - t} - \dfrac{cr - t}{r - t + c - 1}} = \frac{(bq - q)(r - t + c - 1) - (cq - q)(s - 1 + b - t)}{(bs - t)(r - t + c - 1) - (cr - t)(s - 1 + b - t)}$$

als je dapper verder vereenvoudigt krijg je voor die richtingscoëfficiënt

$m = \dfrac{bqr-bqt-qr-cqs+cqt+qs}{bsr-bst+bcs-bs-rt-ct-crs+cr-bcr+crt+st+bt}$ wat opvalt is die q “overal”. . . . .

Bij het invullen om te zien of M op lijn KL ligt zie je:

$$\frac{cq-bq}{c-s+r-b} - \frac{bq-q}{s-1+b-t} = m \cdot \left(\frac{cr-bs}{c-s+r-b} - \frac{bs-t}{s-1+b-t}\right)$$

we halen de q weg en vermenigvuldigen met $(c-s+r-b)(s-1+b-t)$ . . links/rechts:

$(\mathrm{c}-\mathrm{b})(\mathrm{s}-1+\mathrm{b}-\mathrm{t}) - (\mathrm{b}-1)(\mathrm{c}-\mathrm{s}+\mathrm{r}-\mathrm{b}) = \ldots\ldots.$

$= cs - ct + bt - br - s + r = \cancel{m} \cdot \big((cr-bs)(s-1+b-t) - (bs-t)(c-s+r-b)\big)$

weer met dezelfde notatie voor $\cancel{m}$ als eerder en verder uitwerken geeft links

$(cs - ct + bt - br - s + r) \cdot (bsr - bst + bcs - bs - rt - ct - crs + cr - bcr + crt + st + bt)$

en rechts (gesorteerd):

$(-cs + ct - bt + br + s - r) \cdot (-brs + bst - bcs + bs + rt + ct + crs - cr + bcr - crt - st - bt)$

En weer is het gelukt.

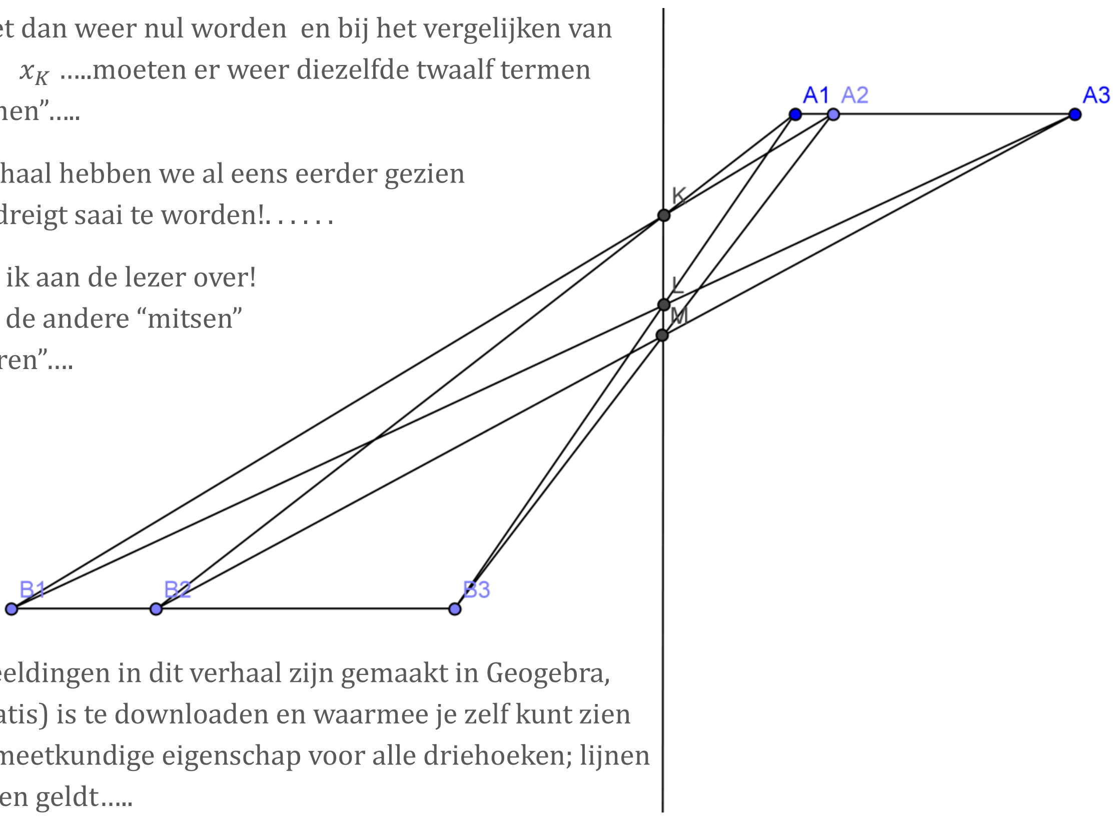
Is het mogelijk dat ook nu weer lijn KL verticaal loopt? Ja, kijk maar:

$bsr - bst + bcs - bs - rt - ct - crs + cr - bcr + crt + st + bt$

.... moet dan weer nul worden en bij het vergelijken van x_M met x_K .....moeten er weer diezelfde twaalf termen “uitkomen”.....

Dat verhaal hebben we al eens eerder gezien en het dreigt saai te worden!. . . . . .

Dit laat ik aan de lezer over!
Evenzo de andere “mitsen”
en “maren”....



De afbeeldingen in dit verhaal zijn gemaakt in Geogebra, dat (gratis) is te downloaden en waarmee je zelf kunt zien of een meetkundige eigenschap voor alle driehoeken; lijnen of punten geldt.....

Dhr. R. Cartesius zou verrukt zijn geweest als hij met Geogebra had kunnen werken!

Valkenisse augustus 2014