www.raves.nl
ton@raves.nl

EEN OUDE STELLING UIT DE MEETKUNDE

LUIDT:

Als drie cirkels elkaar onderling snijden, dan zullen de drie koorden (*) ofwel precies in één punt snijden, ofwel evenwijdig zijn en in dat geval liggen de middelpunten op één lijn.

IDEE VAN HET BEWIJS

We kiezen een assenstelsel zo dat het middelpunt van de eerste cirkel de oorsprong (0,0) is en na eventuele vergroting/verkleining de straal precies 1 is. We kiezen verder de assen zo dat het middelpunt van de tweede cirkel precies op de y-as ligt. De vergelijkingen van de cirkels worden dan:

$c_1: \quad x^2 + y^2 = 1 \qquad (1)$

$c_2: \quad x^2 + (y-b)^2 = r^2 \qquad (2)$

$c_3: (x-c)^2 + (y-d)^2 = R^2 \qquad (3)$

Vervolgens gaan we vergelijkingen oplossen……

OPMERKINGEN

Men mag voor cirkel c_2 gerust $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ (2bis) kiezen; de extra variabele a maakt het rekenwerk niet moeilijker. Wel is het dan mogelijk dat de verbindingslijn (*) van de snijpunten ("koorde") van de eerste twee cirkels c_1 en c_2 verticaal loopt! Die koorde heeft in dat speciale geval een vergelijking waar de variabele y niet in voorkomt; in een bijlage is te lezen hoe het bewijs dan verder gaat. De koorde van c_1 en c_2 is in ons geval horizontaal! Dat laten we hieronder middels vergelijkingen combineren zien:

C_1 EN C_2

$x^2 + y^2 = 1$

$\underline{x^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2}$

$2by - b^2 = 1 - r^2$ dus (mits $b \neq 0$) $y = \frac{b^2+1-r^2}{2b}$ (4)

Dit is een horizontale lijn, zolang die eis $b \neq 0$ geldt.

Mocht nu wel gelden: b = 0…. Wat dan? Welnu dan hebben we het over concentrische cirkels (c_1 en c_2 hebben dan hetzelfde middelpunt: (0,0) en snijden –als $r \neq 1$– elkaar niet of vallen samen: als r = 1). In dit uitzonderingsgeval hebben we slechts twee (evenwijdige) koorden…… In het vervolg houden we vast aan $b \neq 0$.

Mocht men hebben gewerkt met de algemene versie van c_2: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

dan is de vergelijking van de koorde: $\boldsymbol{y} = \frac{a^2+b^2-r^2+1}{2b} - \frac{a}{b}\boldsymbol{x}$ (4bis)

Deze lijn staat loodrecht op de lijn door de middelpunten (0,0) en (a,b) …. Ga maar na!

Mij bekruipt het gevoel dat ik dit al eens ergens eerder heb gezien….maar waar?.......zie ook TWEE CIRKELS

C_1 EN C_3

$x^2 + y^2 = 1$

$\underline{x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 2dy + d^2 = R^2}$

$2cx + 2dy - c^2 - d^2 = 1 - R^2$ en (mits $d \neq 0$) : $y = \frac{c^2+d^2+1-R^2-2cx}{2d}$ (5)

Verderop komen we terug op de situatie waarbij wel geldt: d = 0.

Voorlopig gaan we er van uit dat $d \neq 0$

(4) EN (5) GELIJKSTELLEN

(na kruiselings vermenigvuldigen en aan beide kanten delen door 2) :
$db^2 + d - dr^2 = bc^2 + bd^2 + b - bR^2 - 2bcx$
$2bcx = bc^2 + bd^2 + b - bR^2 - db^2 - d + dr^2$
en mits $c \neq 0$ is van het snijpunt $x = \frac{bc^2+bd^2+b-bR^2-db^2+dr^2-d}{2bc}$ (6)
In het geval: c=0 blijken de drie cirkels alle hun middelpunt op de y-as te hebben en dan hebben we het weer over evenwijdige (horizontale) koorden…
In het alg. geval (4bis en 5): $x = \frac{bc^2+bd^2+b-bR^2-da^2-db^2+dr^2-d}{2bc-2ad}$ (6bis)
nu onder de aanname dat $bc \neq ad$ Hierover verderop meer…..

C2 EN C3

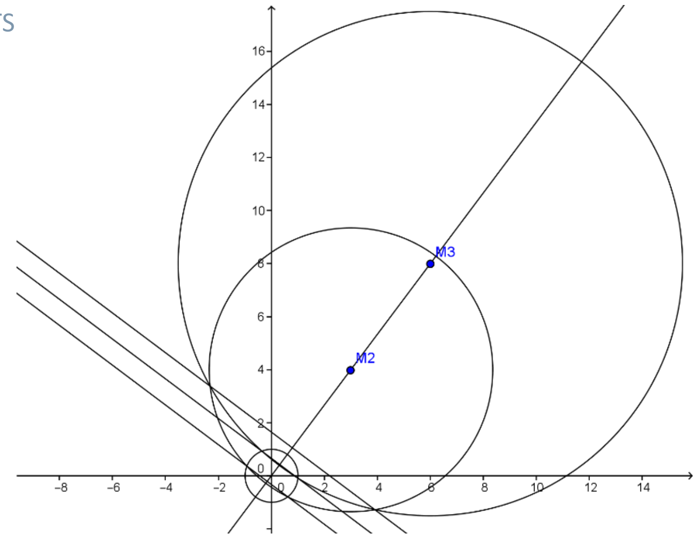
combineren geeft: $2cx - c^2 - 2by + b^2 + 2dy - d^2 = r^2 - R^2$ en:
$(2d - 2b)y = r^2 - R^2 + c^2 + d^2 - b^2 - 2cx$ dus $y = \frac{r^2 - R^2 + c^2 + d^2 - b^2 - 2cx}{2d-2b}$ (7)
De uitgebreider versie (2bis en 3): $y = \frac{r^2 - R^2 + c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + (2a-2c)x}{2d-2b}$ (7bis)
beide uiteraard nog steeds onder de aanname $b \neq 0$ en $d \neq 0$

(na kruiselings vermenigvuldigen) :
$(2d-2b)\{c^2 + d^2 - R^2 + 1 - 2cx\} = 2d\{r^2 - R^2 + c^2 + d^2 - b^2 - 2cx\}$ (8)
(linkerlid)
$2dc^2 + 2d^3 - 2bc^2 - 2bd^2 - 2dR^2 + 2bR^2 + 2d - 2b - 4cdx + 4bcx =$
(rechterlid)
$2dr^2 - 2dR^2 + 2dc^2 + 2d^3 - 2db^2 - 4cdx$
$\{4bc-4cd+4cd\}x = 2bc^2 + 2bd^2 - 2bR^2 + 2b - 2db^2 + 2dr^2 - 2d$
(alles delen door 2):
$2bcx = bc^2 + bd^2 - bR^2 + b - db^2 + dr^2 - d$
en hieruit komt precies regel (6)
$x = \frac{bc^2+bd^2+b-bR^2-db^2+dr^2-d}{2bc}$
In het algemene geval (met de extra variabele a):
$(2d-2b)\{c^2 + d^2 - R^2 + 1 - 2cx\} = 2d\{r^2 - R^2 + c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + (2a-2c)x\}$
(linkerlid)
$2dc^2 + 2d^3 - 2bc^2 - 2bd^2 - 2dR^2 + 2bR^2 + 2d - 2b - 4cdx + 4bcx =$
(rechterlid)
$2dr^2 - 2dR^2 + 2dc^2 + 2d^3 - 2da^2 - 2db^2 + 4adx - 4cdx$
$\{4bc-4cd-4ad+4cd\}x = 2bc^2 + 2bd^2 - 2bR^2 + 2b - 2da^2 - 2db^2 + 2dr^2 - 2d$
(alles delen door 2): $(2bc-2ad)x = bc^2 + bd^2 - bR^2 + b - da^2 - db^2 + dr^2 - d$
en hieruit komt precies (mits $bc \neq ad$) regel (6bis)
$x = \frac{bc^2+bd^2+b-bR^2-da^2-db^2+dr^2-d}{2bc-2ad}$

VOORWAARDEN:

Om met de laatste te beginnen: Als $b \neq 0$ en $d \neq 0$ dan is: $bc = ad$ op te vatten als:
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ en aan de hand van een getallenvoorbeeldje is te zien wat dit betekent: neem cirkel c_2 met a = 3 en b = 4 en vervolgens
cirkel c_3 met c = 6 en d = 8.
Dan liggen de middelpunten $M_1(0,0)$; M_2 en M_3 op één lijn en zijn er drie evenwijdige koorden…..zie hieronder in een situatieschets:

SITUATIESCHETS

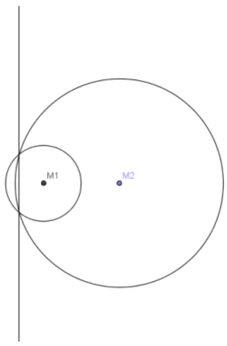


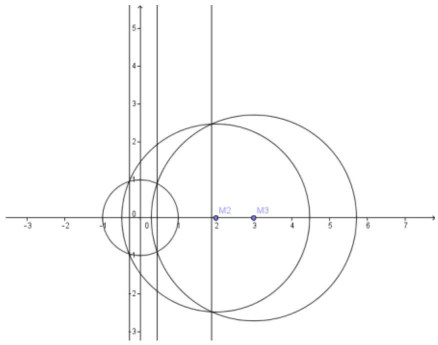
WAT ALS . . . . $b \neq 0$ NIET geldt? . . . In het algemene geval met c_1 : $x^2 + y^2 = 1$

en c_2 : $(x - a)^2 + y^2 = r^2$

. . . dan hebben we alvast een verticale koorde . . . zie (kleine) figuur links:

Mocht nu in (3) ook de d nog nul zijn: $d = 0$ en c_3 : $(x - c)^2 + y^2 = R^2$ dan hebben we weer de situatie dat de middelpunten op één lijn liggen: de x-as !! . . . evenwijdige (verticale) koorden zoals in de figuur hieronder rechts:





Als b = 0 EN $d \neq 0$ dan hebben we een verticale koorde: $x = \frac{a^2 - r^2 + 1}{2a}$ (1) en (2)

In vergelijking (7bis) met b = 0 : $y = \frac{r^2 - R^2 + c^2 + d^2 - a^2 + (2a - 2c)x}{2d}$ (2) en (3)

We hadden al gevonden: (5) $y = \frac{c^2 + d^2 + 1 - R^2 - 2cx}{2d}$ (1) en (3)

En dit gaan we eens netjes combineren . . . .

$x = \frac{a^2 - r^2 + 1}{2a}$ substitueren in (5) geeft $y = \frac{c^2 + d^2 - R^2 + 1 - \frac{2c}{2a}\left\{\frac{a^2 - r^2 + 1}{1}\right\}}{2d}$ (I)

$x = \frac{a^2 - r^2 + 1}{2a}$ substitueren in $y = \frac{r^2 - R^2 + c^2 + d^2 - a^2 + (2a - 2c)x}{2d}$ geeft:

$$y = \frac{r^2 - R^2 + c^2 + d^2 - a^2 + (2a - 2c)\{\frac{a^2 - r^2 + 1}{2a}\}}{2d} \qquad \text{(II)}$$

(I) en (II) gelijkstellen: $c^2 + d^2 - R^2 + 1 - \frac{c}{a}\left\{\frac{a^2 - r^2 + 1}{1}\right\} =$ (*)

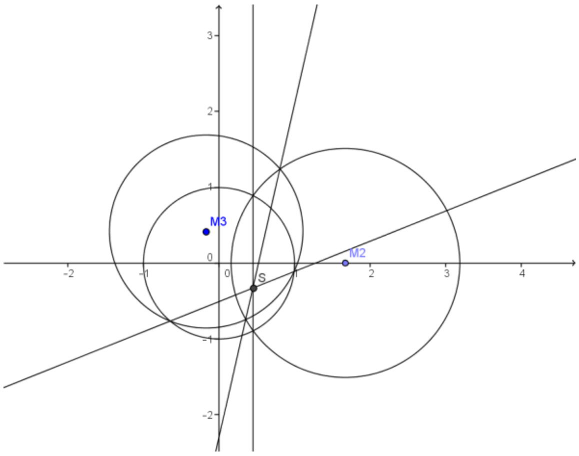
$$= r^2 - R^2 + c^2 + d^2 - a^2 + \frac{a - c}{a}\{\frac{a^2 - r^2 + 1}{1}\}$$

$$= r^2 - R^2 + c^2 + d^2 - a^2 + (1 - \frac{c}{a})\{\frac{a^2 - r^2 + 1}{1}\}$$

$$= r^2 - R^2 + c^2 + d^2 - a^2 + a^2 - r^2 + 1 - \frac{c}{a}\{\frac{a^2 - r^2 + 1}{1}\}$$

$$= c^2 + d^2 - R^2 + 1 - \frac{c}{a}\left\{\frac{a^2 - r^2 + 1}{1}\right\}$$ en ook dit klopt (*)

Merk hierbij op dat $\frac{a-c}{a} = 1 - \frac{c}{a}$ de bewijsvoering versnelt.
Hieronder de reguliere situatie:



TWEE CIRKELS

Wanneer men de vergelijkingen van twee cirkels combineert (links en rechts van elkaar afhaalt, om de kwadraten kwijt te raken) dan krijgt men de vergelijking van een lijn k, een eventuele snijlijn...

Voorbeeld1: $x^2 + y^2 = 1$ combineren met $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ geeft $\boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{x}$

Voorbeeld2: $x^2 + y^2 = 1$ met $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$ geeft $\boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{8}} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{x}$ en dit is NIET de vergelijking van de **koorde** (om precies te zijn: het is die van de middelloodlijn van het lijnstuk tussen de middelpunten!!!) . . . Als je toch een snijpunt gaat zoeken krijg je een vergelijking met een negatieve discriminant.

Voorbeeld3: $x^2 + y^2 = 1$ met $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$ geeft $\boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{x}$ (raaklijn!!) en . . . . $x = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$. . .

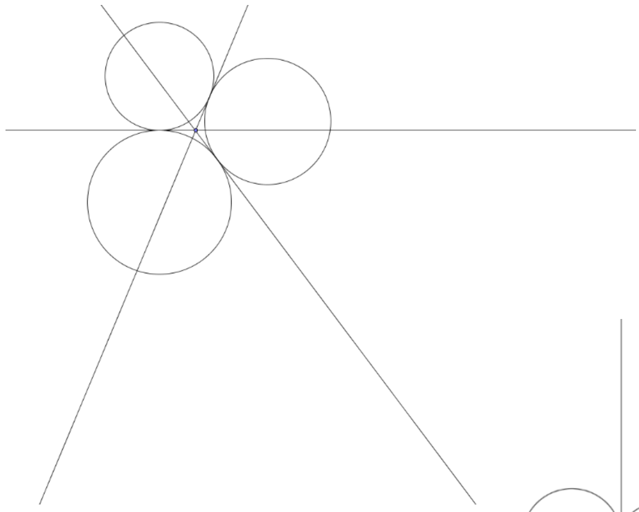
Dat "combineren" blijkt niets anders dan een zogenaamde "**machtlijn**" op te leveren.
Hieronder vind je "links" naar die theorie over "machtlijnen van cirkels".

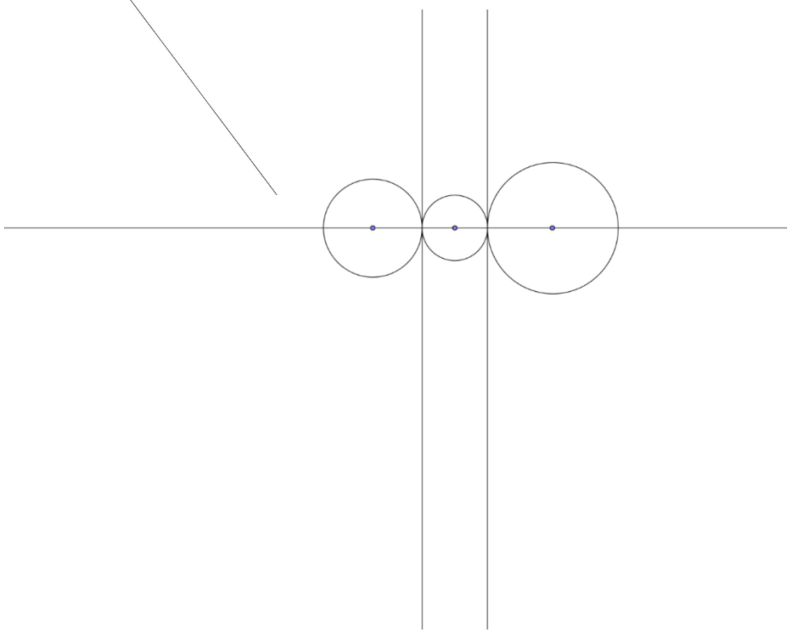
- http://www.pandd.demon.nl/machtpunt.htm

- http://www.hhofstede.nl/modules/machtpunt.htm

Volgens deze theorie is bijvoorbeeld de … Hoogtelijnstelling van een driehoek … slechts een kwestie van machtlijnen van drie cirkels. Het stuk algebra waarin je 2 hoogtelijnen maakt en snijdt en laat zien dat dit snijpunt op de derde hoogtelijn ligt geeft echter een verwondering en voldoening die ik graag doorgeef aan de lezer…… (kies een geschikt assenstelsel….)

RAKENDE CIRKELS De Stelling kan aangepast worden voor de situatie van rakende cirkels, met middelpunten wel of niet op één lijn…..zoals in





NAWOORD: Er is een **3D-variant** van de Oude Stelling:

"Als drie bollen elkaar onderling snijden, dan zullen de drie vlakken waarin elk van de snijcirkels
liggen ofwel evenwijdige snijlijnen opleveren, ofwel de snijvlakken zijn evenwijdig en in dat geval liggen de middelpunten op één lijn."

Om met het laatste geval te beginnen: Als de drie middelpunten op één lijn liggen dan zullen de snijvlakken loodrecht op deze lijn staan. Dit is eenvoudig in te zien. Als de middelpunten niet op één lijn liggen wordt het lastiger voor te stellen, maar beschouw een vlak door de middelpunten van de bollen, M_1 ; M_2 en M_3 . . . . Elk van de drie snijcirkels (snijvlakken) zal dan loodrecht op dit vlak staan. We kiezen het assenstelsel weer slim:
Neem M_1 als oorsprong (0,0,0); de straal van de eerste bol voor het gemak weer 1 en neem voor $M_2(a, b, 0)$ en de straal van de tweede bol: r . . . . Bij de derde bol nemen we voor de straal: R en middelpunt $M_3(c, d, 0)$. Het vlak waarin M_1 ; M_2 en M_3 liggen is (dan) het Oxy-vlak
Zonder alles helemaal uit te schrijven een eerste indruk van het bewijs:

B_1 : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (I)

B_2 : $(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = r^2$ (II)

B_3 : $(x - c)^2 + (y - d)^2 + z^2 = R^2$ (III)

Bij het combineren hou je vergelijkingen van snijvlakken over (op dezelfde wijze als de koorden in de 2D-variant) zoals: $2ax + 2by = a^2 + b^2 + 1 - r^2$

$$2cx + 2dy = c^2 + d^2 + 1 - R^2$$

en: $(2c - 2a)x + (2d - 2b)y = c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + r^2 - R^2$

Merk op dat in geen enkele vergelijking van de snijvlakken z voor komt….Als twee snijvlakken een punt gemeenschappelijk hebben dan is de (elke) snijlijn er een met verticale richting! Als twee snijvlakken geen punt gemeen hebben dan moet je dat aan de vergelijkingen kunnen zien! De normaalvectoren van de vlakken moeten dan een veelvoud van elkaar zijn:
(ook hier geldt dan weer): $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ en zelfs: $\frac{a}{b} = \frac{2c-2a}{2d-2b}$ (er is sprake van afhankelijkheid) en in dat geval liggen de middelpunten op één lijn! Ik laat het aan de lezer over om te zien wat er gebeurt als een noemer nul dreigt te worden….

De **uitbreiding** van de 3D-variant is dat als bollen elkaar raken de raakvlakken ofwel evenwijdige snijlijnen hebben, ofwel onderling evenwijdig zijn (afhankelijk van of de middelpunten op één lijn liggen of niet). . . .

Hiermee zijn we aan het eind van het verhaal gekomen, lees echter De Opdracht!

Valkenisse 26-07-2013
Ton Raves