www.raves.nl
ton@raves.nl

WAT IS HET IDEE ACHTER CARTESISCHE BEWIJZEN? HOE BEGIN JE?

WAAR ZIT DE LOL?

Als je jezelf een wiskundige vraag stelt dan hoop je een antwoord (met als bonus wat extra inzicht!) te krijgen op wiskundige gronden, gefundeerd op meetkundige kennis (reeds bewezen stellingen) en/of wetten uit de algebra. Een sleutel-voorbeeld:

2 LIJNEN SNIJDEN….

Je wilt twee lijnen – die je eventueel door vergelijkingen zou kunnen beschrijven – snijden en een expressie voor het snijpunt "zien"……

HOE BEGIN JE?

Tja….hoe pak je zoiets in de geest van Descartes aan?

Er zijn twee opties: je neemt voor die vergelijkingen de algemene gedaanten: ax+by+c=0 en dx+ey+f=0 ; hierbij zijn a, b, c, d, e en f constanten…..

Of (tweede optie:) je neemt de eerste lijn verticaal en de tweede (niet-verticale) lijn van de vorm: y=ax+b … Je kunt dat zo kiezen als je begint met je "meetkundige bewijs", omdat het assenstelsel nog niet "geplaatst is"….. En dat is nu de kracht van zo'n bewijs!

SNELSTE OPTIE:

Kies de eerste lijn verticaal….en kies voor de oorsprong nu precies het snijpunt van de tweede lijn met de eerste!!! Tja, dan heeft het snijpunt coördinaten: (0,0) …simpeler kan niet!

EN ALS DE OORSPRONG AL ELDERS LIGT?

Het kan zijn dat er randvoorwaarden golden/gelden….een derde lijn of ander meetkundig figuur ligt "in de weg" … maar de eerste lijn ligt nog wel op de y-as….. (M.a.w. "het assenstelsel is al geplaatst"….)

Dan is de oorsprong wel vastgelegd en daarmee de vergelijking van die 2e lijn: y=ax + b met a en b constanten…. En in dat geval is het snijpunt simpel: (0, b)

VALKUIL

Neem voor die eerste lijn niet de x-as!!! Want als de oorsprong (0,0) daar ergens op ligt wordt de vergelijking van de 2e lijn: ax+by+c=0

Je mag dan niet van een vergelijking y=ax+b uitgaan, want ook een verticale lijn is mogelijk (en die heeft een vergelijking van de vorm: x=c)

Doe je dit toch dan krijg je voor het snijpunt in het "reguliere geval":

$x = -\frac{b}{a}$ (en uiteraard y-coördinaat: 0)

In het niet-reguliere geval wordt het snijpunt: (c,0)

EERSTE OPTIE:

In het ongunstigste geval is de oorsprong al "vergeven", evenals de assen…

Dan zul je wel verder moeten worstelen met die $ax+by+c=0$ *en* $dx+ey+f=0$…

Nu is het zaak **dapper** te durven blijven doorgaan!! We gaan "**gewoon elimineren**":

$adx+bdy+cd=0$ combineren met $adx+aey+af=0$ en vinden: $(bd-ae)y=af-cd$ … dus:

$y = \frac{af-cd}{bd-ae}$ (*) en (na invullen in de 1e vergelijking:) $ax = b \cdot \frac{cd-af}{bd-ae} - c$

Het ziet er weinig hoopvol uit….. en toch moet je durven doorgaan!

Gelijknamig maken geeft: $ax = \frac{bcd - abf}{bd-ae} - \frac{bcd-ace}{bd-ae}$
Kijk nu zelf eens wat er allemaal wegvalt (na delen door a) ……..
…………… En vond jij ook: $x = \frac{ce - bf}{bd - ae}$?
Tja die voorwaarde… (*) …. wanneer is die noemer "per ongeluk" nul?

Uit *bd=ae* volgt: $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ (mits b≠0 en e≠0……)

Denk hierbij aan bijvoorbeeld: 3x+4y+5=0 en 6x+8y+9=0 …. Maar dit zijn 2 evenwijdige lijnen ! En dat was niet volgens de aanname; deze lijnen snijden elkaar niet echt!

Dus toch nog wat inzicht in hoe de vergelijkingen en de coördinaten van het snijpunt kunnen zijn!

Een ander stuk inzicht betreft het feit dat de lijnen met vergelijkingen $ax + by + c = 0$ en: $bx - ay + d = 0$ loodrecht op elkaar staan. Je kunt dat met behulp van vectorvoorstellingen heel elegant laten zien, maar ook m.b.v. de stelling dat 2 lijnen loodrecht op elkaar staan als het product van hun richtingscoëfficiënten gelijk is aan −1. (Mits die bestaan….)

Ik laat dat graag aan de lezer over. Evengoed wordt dit herhaaldelijk gebruikt in de overige bewijzen!