DE STELLING VAN HERON

LUIDT: De oppervlakte O van een driehoek met zijden a, b en c is:

$O = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$

waarbij s de halve omtrek is: $s = \frac{a+b+c}{2}$

Een alternatief is: $O = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)}$

IDEE VAN HET BEWIJS We kiezen een assenstelsel zo dat het eerste punt A de oorsprong (0,0) is en na eventuele vergroting of verkleining punt B precies (1,0) is. Dan wordt punt C(x, y).....en de oppervlakte van de driehoek: $\frac{1}{2}y$ ...

Ja inderdaad wel heel erg simpel! $O^2 = \frac{1}{4}y^2$ zou dan moeten volgen.....

En in het bijzonder: $(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b) = 4y^2$

(denk eraan dat er met **16** vermenigvuldigd moest worden om dit laatste te krijgen!)

Het gerucht gaat dat Archimedes de formule al kende!

Heron van Alexandrië werkte in de bibliotheek van Alexandrië , zoals jaren later Pappus van Alexandrië ...

Die bibliotheek is helaas in een grote brand vernietigd......

Wat een beetje vrees/ontzag inboezemt is dat product van vier wortelexpressies...gewoon maar beginnen:

De expressie $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$ is uit te schrijven

tot: $\boldsymbol{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$

En wees eerlijk: dat ziet er hoopvol uit! Louter kwadraten!

Dat moet ook Archimedes (en veel later Descartes !) zijn opgevallen!

Bij ons is $a = \sqrt{(1-x)^2 + y^2}$ .... $b = \sqrt{x^2 + y^2}$ ..... en $c = 1$ .... Laten we dus eens invullen:

$2((1-x)^2 + y^2)(x^2 + y^2) + 2((1-x)^2 + y^2) + 2(x^2 + y^2) - ((1-x)^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)^2 - 1$ . . . . . .

. . . . . zou uiteindelijk gelijk moeten zijn aan: $4y^2$

Daar gaat-ie dan:

$(2(1-2x+x^2)+2y^2)(x^2+y^2)+2(1-2x+x^2)+2y^2+2x^2+2y^2-((1-2x+x^2)+y^2)^2-x^4-2x^2y^2-y^4-1$

$= (2-4x+\mathbf{2x^2}+\mathbf{2y^2})(\mathbf{x^2}+\mathbf{y^2})+2-4x+2x^2+2y^2+2x^2+2y^2-((1-2x+x^2)+y^2)^2-x^4-2x^2y^2-y^4-1$

$= \mathbf{2x^2}+\mathbf{2y^2}-4x^3-4xy^2+2x^4+\mathbf{4x^2y^2}+2y^4+2-4x+\mathbf{2x^2}+\mathbf{2y^2}+\mathbf{2x^2}+\mathbf{2y^2}-((1-2x+x^2)+y^2)^2-x^4-2x^2y^2-y^4-1$

$= \mathbf{6x^2}+\mathbf{6y^2}-4x^3-4xy^2+2x^4+4x^2y^2+2y^4+2-4x-((1-2x+x^2)+y^2)^2-x^4-2x^2y^2-y^4-1$

$=6x^2+6y^2-4x^3-4xy^2+2x^4+4x^2y^2+2y^4+2-4x-\left(\left(1-2x+x^2\right)+y^2\right)^2-x^4-2x^2y^2-y^4-1$

$=6x^2+6y^2-4x^3-4xy^2+2x^4+4x^2y^2+2y^4+2-4x-\left(\left(1-2x+x^2\right)+y^2\right)^2-x^4-2x^2y^2-y^4-1$

$= 6x^2+6y^2-4x^3-4xy^2+2x^4+4x^2y^2+2y^4+2-4x-\left(1-2x+x^2\right)^2-2\left(1-2x+x^2\right)y^2-y^4-x^4-2x^2y^2-y^4-1$

$= 6x^2+6y^2-4x^3-4xy^2+2x^4+2x^2y^2+2-4x-\left(1-2x+x^2\right)^2-2\left(1-2x+x^2\right)y^2-x^4-1$

$= 6x^2+6y^2-4x^3-4xy^2+2x^4+2x^2y^2+2-4x-(1-2x+x^2)^2-2\left(1-2x+x^2\right)y^2-x^4-1$

$= 6x^2+6y^2-4x^3-4xy^2+2x^4+2x^2y^2+2-4x-(1+4x^2+x^4-4x+2x^2-4x^3)-2\left(1-2x+x^2\right)y^2-x^4-1$

$= 6x^2+6y^2-4x^3-4xy^2+2x^4+2x^2y^2+2-4x-1-4x^2-x^4+4x-2x^2+4x^3-2\left(1-2x+x^2\right)y^2-x^4-1$

$= 6y^2-4xy^2+2x^4+2x^2y^2+2-4x-1-x^4+4x-2\left(1-2x+x^2\right)y^2-x^4-1$

$= 6y^2-4xy^2+2x^4+2x^2y^2-4x-x^4+4x-2(1-2x+x^2)y^2-x^4$

$= 6y^2-4xy^2+2x^4+2x^2y^2-4x-x^4+4x-2y^2+4xy^2-2x^2y^2-x^4$

$= 6y^2-4xy^2-4x+4x-2y^2+4xy^2$

$= 4y^2$

Telkens als er te weinig ruimte leek om de hele regel te tonen viel er weer wat weg!

(Er is derhalve af en toe een kleiner lettertype en “liggende pagina-indeling” gebruikt)

Een rasecht cartesisch bewijs!

Op wikipedia en in wiskundeboeken vindt men een bewijs met behulp van de cosinusregel waarbij gebruikt is dat de oppervlakte van driehoek ABC gelijk is aan $\frac{1}{2}ab \cdot \sin(\gamma)$, waarbij γ staat voor $hoek\ ACB$.

Volgens de cosinusregel geldt: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$ oftewel: $\cos(\gamma) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

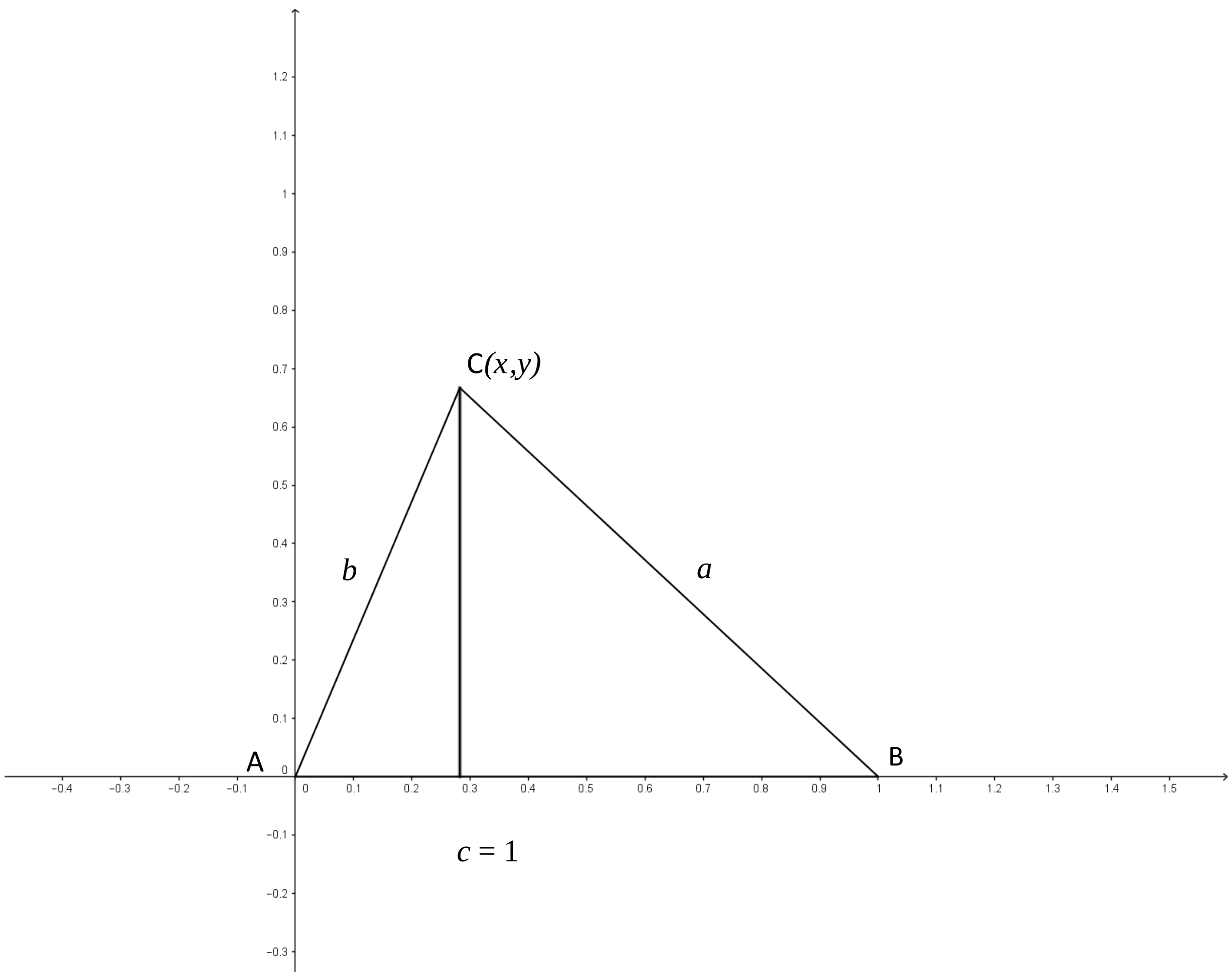
vervolgens gebruikt men de truc: $\sin(\gamma) = \sqrt{1 - cos^2(\gamma)} = \sqrt{(1-\cos(\gamma))(1+\cos(\gamma))}$

verder is het een kwestie van invullen....

De Stelling van Napoleon waarvan ik ook een cartesisch bewijs gaf kan ook uitermate kort door middel van wat gonio (met name de cosinusregel) bewezen worden, maar dat mist de charme van het zien ontstaan van allerlei kwadraten en mengtermen die aan het eind weer allemaal tegen elkaar wegvallen

Merk op dat wij helemaal geen tekening nodig hadden; die geven we hieronder (zie bijlage) wel.

Valkenisse augustus 2017


C(x,y)
b
a
A
B
c = 1