Formele Logica

Grondlegger **Aristoteles** (384/322 voor Chr.), filosoof .

Andere "grote" namen van wiskundigen en/of filosofen:
Plato, Socrates, Descartes (Cartesius), Spinoza, Kant, Russell, Hilbert, Tarski en Brouwer

§1. Propositie-Logica

Heeft als **taalelementen** de symbolen $\wedge$, $\vee$, $\neg$
naast (hoofdletters) als **A**, **B**, ….
Een letter ("atoom") stelt een **propositie** voor die waar (1) of onwaar (0) is.

Met haakjes kunnen we de taal uitbreiden tot ingewikkelde(r) proposities als
$A \wedge (B \vee C)$
Nog een uitbreiding is het symbool $\rightarrow$ soms ook (onterecht) geschreven als $\Rightarrow$
Een **Stelling** (soms genoemd "axioma") is een propositie die altijd waar is ongeacht de waar(heids-) waarde van de atomen die er in staan.

Waarheidswaarde-tabellen:

A	
1	"A is waar"
0	"A is onwaar"

A	$\neg$A
1	0
0	1

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	$\neg$A	B	$\neg A \vee B$
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

De tabel bij $A \rightarrow B$ is echt even wennen!..

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
0	0	0	0	**0**	0	0	**0**
0	0	1	1	**0**	0	0	**0**
0	1	0	1	**0**	0	0	**0**
0	1	1	1	**0**	0	0	**0**
1	0	0	0	**0**	0	0	**0**
1	0	1	1	**1**	0	1	**1**
1	1	0	1	**1**	1	0	**1**
1	1	1	1	**1**	1	1	**1**

Je ziet dat $A \wedge (B \vee C)$ **gelijkwaardig** ("equivalent") is ("aan") met $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
Korter genoteerd: $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

In onze taal is . . $\Rightarrow$ . . de **"implicatie"… ("als . . dan . .")** niet te verwarren met $\rightarrow$

Meta-taal-symbolen worden verward met propositie-logica-symbolen en dat is voer voor tegenstrijdigheden en paradoxen!
Zo lang men zich aan de regels van de logica houdt is er niets aan de hand.

Wat zijn die regels? Hieronder volgen er enkele (NIET ALLE!):
(Axioma): $A\vee\neg A$,of … vertaald: $A\rightarrow A$ (Tja, …"uit A volgt A"…altijd waar!)
$\neg(\neg A) \quad\Leftrightarrow\quad A$
$A\wedge B \quad\Leftrightarrow\quad B\wedge A$
$A\vee B \quad\Leftrightarrow\quad B\vee A$
$A\vee(B\vee C) \quad\Leftrightarrow\quad (A\vee B)\vee C$ (hier mag men dus haakjes weglaten: $A\vee B\vee C$)
$A\wedge(B\wedge C) \quad\Leftrightarrow\quad (A\wedge B)\wedge C$ ofwel: $A\wedge B\wedge C$
$A\wedge(B\vee C) \quad\Leftrightarrow\quad (A\wedge B)\vee(A\wedge C)$
$A\vee(B\wedge C) \quad\Leftrightarrow\quad (A\vee B)\wedge(A\vee C)$
$\neg(A\wedge B) \quad\Leftrightarrow\quad \neg A\vee\neg B$ (eigenlijk zouden hier extra haakjes moeten staan…)
$\neg(A\vee B) \quad\Leftrightarrow\quad \neg A\wedge\neg B$ idem..

$(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow C)$ is NIET gelijkwaardig met $A\rightarrow C$
(de beruchte denkfout van Sherlock Holmes)
Om precies te zijn geldt wel: $(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow C) \;\Rightarrow\; A\rightarrow C$ ("nice deduction Watson"!)

LOGISCH REDENEREN is in feite het vertalen van regels van de (propositie-) logica naar ("in") onze taal. Je neemt dan enkele aannamen/observaties en trekt juiste conclusies. (Dus een kwestie van "concluderen")
In plaats van $A\wedge(A\rightarrow B)$ schrijft men ook wel: $A\rightarrow B, A$
en er geldt: $A\rightarrow B, A \;\Rightarrow\; B$
Deze regel staat ook bekend als "modus ponens"
Ook geldt: $A\rightarrow B, \neg B \;\Rightarrow\; \neg A$
Soms schrijft men het onder elkaar (en met slordige schrijfwijze:)
$\underline{A\Rightarrow B,\ \neg B}$ en deze regel staat bekend onder de naam: "modus tollens"
$\neg A$
Met "modus nonsens" wordt bedoeld: $A\rightarrow B \;\Rightarrow\; B\rightarrow A$ en dit is gewoon onjuist!

We vertalen dit eerst eens netjes naar de propositie-logica:
$A\rightarrow B$ is **hetzelfde** als $\neg A\vee B$ en $B\rightarrow A$ is **equivalent met** $\neg B\vee A$
$(A\rightarrow B)\rightarrow(B\rightarrow A)$ is gelijkwaardig met $\mathbf{\neg(\neg A\vee B)}\vee(\neg B\vee A)$ en nu passen we de regels (zie boven) toe: $\mathbf{(A\wedge\neg B)}\vee(\neg B\vee A)$ is NIET altijd (*) waar, bijvoorbeeld als A niet waar is terwijl B wel waar is:

A	B	$(A\wedge\neg B)\vee(\neg B\vee A)$
0	1	0

Opm. Om te bewijzen dat een (vermeende) stelling NIET waar is hoef je slechts één voorbeeld te geven met “atomen” die aan het eind geen 1 maar een 0 laat zien!
Een echte (correcte) stelling heeft altijd in de kolom van de tabel louter “1” staan.

Logisch redeneren (“concluderen”) gaat met wat simpele regels zoals:

$$\frac{A}{A \vee B}$$

Terugvertaald betekent dit: A $\Rightarrow$ **(**A$\vee$B) en in de propositielogica: A$\rightarrow$(A$\vee$B)
En dit is gelijkwaardig met **$\neg A \vee A$**$\vee$B en het blauwe stukje is een axioma !
We hebben dit in feite “verzwakt” met de toevoeging “…$\vee$B”

$$\frac{A \wedge B}{A}$$

Je kunt dit met gevoel voor logica direct inzien, maar ook met een waarheidswaardentabel verifiëren.
Langzamerhand ontwikkel je een soort gevoel voor logica en hoef je niet telkens een waarheidswaarden-tabel te maken! Wat vind jij van:

“Als je een motief hebt en geen alibi dan ben je de dader”? De wereld om ons heen zit vol redeneringen en dwalingen! In de krant en op tv hoor/lees en of zie je de gekste dingen

In een processor van een computer zit een gedeelte genaamd ALU. (Arithmetic and Logical Unit) waarin duizenden logische schakelingen zitten met een AND-port ($\wedge$); een OR-poort: ($\vee$) een NON-poort ($\neg$) en diverse andere waaronder de “exclusive Or”-poort en zelfs de Equivalent-poort ($\leftrightarrow$) met tabel:

A	B	A$\leftrightarrow$B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

In het boek (deel 4 van Getal en Ruimte, Wiskunde C) wordt $\Leftrightarrow$ hiermee een beetje verward. Men spreekt over “mits”. . . gevaarlijk!
“Dan en slechts dan als” ..klinkt beter net als “noodzakelijke en voldoende voorwaarde”. Eigenlijk is die tabel het meest verhelderend!
In opgave 27 van het boek (deel 4 van Wiskunde C; Getal en Ruimte) wil men dat jij beseft dat A$\leftrightarrow$B gelijkwaardig is met (A$\rightarrow$B) $\wedge$ (B$\rightarrow$A) en in de meta-taal (onze taal) neerkomt op A$\Leftrightarrow$ B is gelijkwaardig met (A$\Rightarrow$B)$\wedge$(B $\Rightarrow$A).

Volgens (mijn) professor (aan de Rijks Univerisiteit van Utrecht) Dirk van Dalen kan dit geen kwaad zolang je maar geen logica gaat bedrijven, met uitspraken (in de meta-taal) over taalelementen van het logische systeem zelf.

Je kunt zelf logische schakelingen maken met een simulatieprogramma zoals LogSim (versie 1.2 of nieuwer) en ze met “schakelaartjes” (te zetten op “1” of “0”…) testen. Leuk binnen het vak informatica; niet voor ons bij wiskunde C (of D)…

De PC bedrijft dus “Computerlogica” geheel volgens de regels van de propositie-logica! Deze logica wordt ook wel Boolean Algebra genoemd, verplichte kost voor informatica-studenten.

We gaan je eens testen:

Probeer de volgende opdrachten zoveel mogelijk zonder tabellen te doen…

1. Is $A \rightarrow B$ hetzelfde als (gelijkwaardig met) $\neg A \wedge B$? **ja / nee**

2. Is de waarheidswaardentabel van $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B)$ hetzelfde als die van B ? **ja / nee**

3. Geldt: $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ **ja / nee**

4. Geldt: $A \wedge B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C$ **ja / nee**

5. Is $A \wedge (B \vee C)$ hetzelfde als $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$? **ja / nee**

6. Is $\neg(A \wedge \neg B)$ hetzelfde als $A \rightarrow B$ **ja / nee**

§2. Predicaten-Logica

De “atomen” in deze vorm van logica kennen variabelen met elk hun (eigen) domein die bepalen of een uitspraak waar is of niet.

We stellen een predicaat als een propositie (uitspraak) voor met daarbinnen nog (een) object/objecten, (of meerdere) variabele(-n), ook nu weer eventueel verder opgebouwd uit meerdere componenten. Sommige eigenschappen of waarden van die variabelen/objecten maken dan het predicaat waar; andere niet.

Sommige predicaten hebben een domein (voor hun variabelen) die overlappen of juist niet met andere predicaten…

Dus wordt het tijd om eens (al-dan-niet) overlappende verzamelingen te bekijken van objecten (getallen of anderszins) die a.h.w. een bepaalde “eigenschap” P hebben, of Q etc.

Venn-diagrammen, genoemd naar de Engelse filosoof en wiskundige John Venn (1834-1923) … zie het boek blz.25 en verder (Getal en Ruimte Wiskunde C deel 4) of op het internet…. Één reeks bijzondere deelverzamelingen verdient de wiskundige aandacht: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

Hierbij staat $\mathbb{N}$ voor de verzameling natuurlijke getallen 0, 1, 2, 3, ….
$\mathbb{Z}$ voor de verzameling gehele getallen …,-2, -1, 0, 1. 2.…
$\mathbb{Q}$ voor de verzameling breuken (quotiënten) ….
$\mathbb{R}$ voor de verz. reële getallen
$\mathbb{C}$ voor de complexe getallen

De taal van de propositie-logica is uitgebreid met predicaten zoals P(x) en Q(x,y) etc. en bovendien met “quantoren” $\forall$ en $\exists$ met betekenis: “voor Alle…” en “Er is een …”

Als in de volgende voorbeelden:

$$\underset{x\,\in\,\mathbf{R}}{\forall}\; x^2 \geq 0 \quad \text{en} \quad \underset{x\,\in\,\mathbf{Q}}{\exists}\;\underset{y\,\in\,\mathbf{N}}{\forall}\; x \leq y$$

Deze vorm van logica is aanzienlijk moeilijker!

Een nieuwe regel is dat $\neg \underset{x}{\forall} P(x) \Leftrightarrow \underset{x}{\exists} \neg P(x)$ waarbij x uit het domein van P gekozen moet/kan worden.

Vertaald betekent dit dat als het NIET geldt dat eigenschap P voor alle objecten uit het domein van P waar is dat er dan tenminste één object x is waarvoor P onwaar is! Dit principe hebben we al eens eerder gezien (*)….

Het omgekeerde geldt uiteraard ook.

De logica heeft nu betrekking op een hele theorie met bewerkingen als optellen, vermenigvuldigen etc. in een getallenverzameling zoals $\mathbb{R}$**.**

Daarvoor gelden de rekenregels van de algebra, het wel/niet hebben van oplossingen van een vergelijking, enz. enz. Soms is het uitermate lastig om te beslissen of een predicaat waar is of niet!

Een van de markantste manieren om iets te bewijzen/beslissen is uit te gaan van het tegendeel en dan na enkele denkstappen tot iets onwaar, in strijd met de aanname te komen… Het "bewijs uit het ongerijmde"…

Een echte tegenstrijdigheid (contradictie) kan ontstaan als taal en meta-taal te slordig zijn gebruikt, zoals in het volgende predicaat: **P**
P: dit predicaat **P** is onwaar

Een schijnbare tegenstrijdigheid wordt ook wel paradox genoemd. Een van de mooiste is die van Achilles en de schildpad en in hoofdstuk (8) Regelmaat en veranderingen is er een variant waar bij Achilles de helft van een mijl achterstand op een vlotte schildpad heeft en die helft loopt; de schildpad loopt half zo langzaam en heeft nu nog steeds een kwart mijl voorsprong….
Een meetkundige rij: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots.$ waarvan de som NIET oneindig is maar precies 1 . . . teken maar eens een lijnstuk met lengte 1, neem het midden en van de rechterhelft weer het midden enz. !

De kunst van het redeneren zie je in de maatschappij op heel veel gebieden! Van het invullen van een Sudoku tot en met het voeren van een debat.

Valkenisse, september 2018