

LUIDT:

Als twee cirkels elkaar raken, dan zullen de punten met gelijke afstanden tot elk van de cirkels liggen op een hyperbool, waarvan de vergelijking is op te stellen door de middelpunten van de cirkels als brandpunten te nemen en als (een) top het raakpunt van de twee cirkels. Een uitzondering ("ontaard geval") wordt gevormd als de cirkels precies even groot zijn: dan is (uiteraard) de gemeenschappelijk raaklijn de verzameling van de punten met gelijke afstanden tot de cirkels.

Adriaan van Roomen (1561-1615) was een Leuvense wiskundige die zich net als Francois (Viète of:) Vieta (1540-1603) en later door René Descartes (Renatus Cartesius) (1596-1650) aan het eind van de 16e eeuw verdiepte in de Stelling van Apollonius van Perga (292-192 voor Christus).

Het boek van Apollonius is helaas verloren gegaan, maar dat het bestaan heeft weten we dankzij een zekere Pappus van Alexandrië (290-350 na Christus) Ja precies!....de wiskundige waarvan de Stelling van Pappos door mij op deze website cartesisch is bewezen.....en ook dat Apollonius het probleem van vier rakende cirkels heeft opgelost. Heel knap...maar hoe dan?

Het verband tussen de (middelpunten en) de lengten van de stralen van respectievelijk 2, 3 en 4 cirkels is een klassiek wiskundig probleem dat door de eeuwen heen is onderzocht. Dat men niet tevreden was met de oplossing van Van Roomen komt door het feit dat een hyperbool "niet-construeerbaar" was; je kon het niet met passer en liniaal construeren.....

IDEE VAN HET BEWIJS:

We kiezen een assenstelsel zo dat het middelpunt van de eerste cirkel de oorsprong $(0,0)$ en de straal precies 1 is. We kiezen verder de assen zo dat het middelpunt van de tweede cirkel precies op de x -as ligt en wel op $(c,0)$.

De vergelijkingen van de cirkels worden dan c_1 : $x^2 + y^2 = 1$ (1)

en c_2 : $(x - c)^2 + y^2 = (c - 1)^2$ (2) met $c > 1$ en $c \neq 2$

De vergelijking van die hyperbool wordt dan: $\frac{(x - \frac{1}{2}c)^2}{(1 - \frac{1}{2}c)^2} - \frac{y^2}{c-1} = 1$ (3)

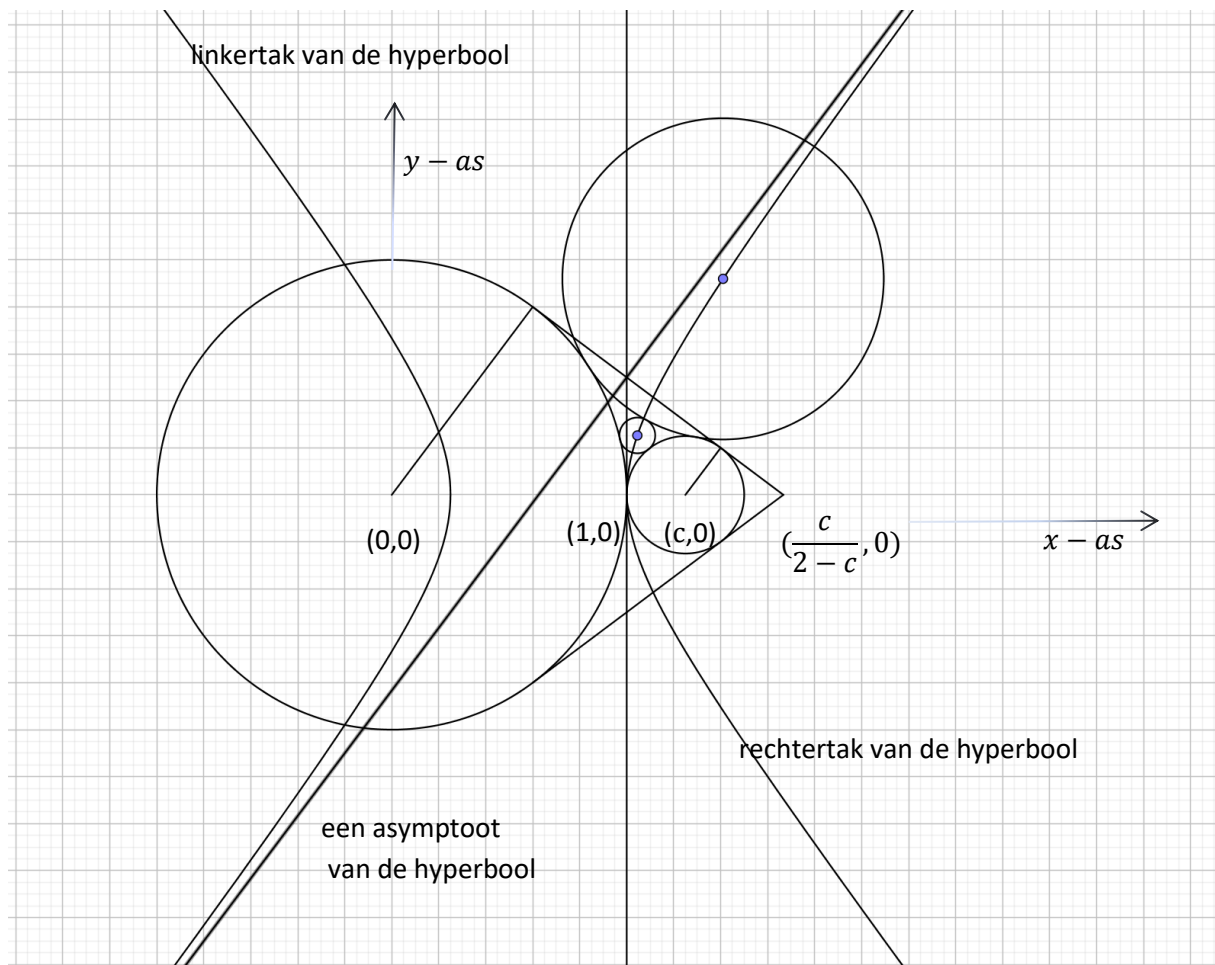
en je ziet meteen waar die voorwaarden voor zijn!

OPMERKINGEN:

In het algemeen is de vergelijking van een hyperbool: $\frac{(x-a)^2}{c} - \frac{(y-b)^2}{d} = 1$

Onze hyperbool moet gaan door $(1,0)$ en heeft de juiste brandpunten en toppen!

Hieronder de reguliere situatie:



figuur I

Behalve de cirkel met middelpunt (0,0) zijn nog enkele cirkels getekend waarvan het middelpunt telkens op (de rechttertak van) de hyperbool ligt; met dank aan GeoGebra!
Dan komt hierna het (cartesisch) bewijs door een willekeurig punt op de hyperbool te

nemen: (a, b) die dus voldoet aan de vergelijking (3): $\frac{(a - \frac{1}{2}c)^2}{(1 - \frac{1}{2}c)^2} - \frac{b^2}{c-1} = 1 \Leftrightarrow$

$$\frac{(2a - c)^2}{(2 - c)^2} - \frac{b^2}{c-1} = 1 \Leftrightarrow \frac{(2a - c)^2}{(2 - c)^2} \cdot (2 - c)^2 \cdot (c - 1) - \frac{b^2}{c-1} \cdot (2 - c)^2 \cdot (c - 1) = (2 - c)^2 \cdot (c - 1) \Leftrightarrow$$

$$(2a - c)^2 \cdot (c - 1) - b^2 \cdot (2 - c)^2 = (2 - c)^2 \cdot (c - 1) \Leftrightarrow$$

$$(4a^2 - 4ac + c^2) \cdot (c - 1) - b^2 \cdot (4 - 4c + c^2) = (4 - 4c + c^2) \cdot (c - 1) \Leftrightarrow$$

$$4a^2c - 4a^2 - 4ac^2 + 4ac + c^3 - c^2 - 4b^2 + 4b^2c - b^2c^2 = 4c - 4 - 4c^2 + 4c + c^3 - c^2$$

$$\Leftrightarrow 4a^2c - 4a^2 - 4ac^2 + 4ac - 4b^2 + 4b^2c - b^2c^2 = 4c - 4 - 4c^2 + 4c \Leftrightarrow$$

$$4a^2c - 4a^2 - 4ac^2 + 4ac - 4b^2 + 4b^2c - b^2c^2 = 8c - 4 - 4c^2 \quad (4)$$

Het lijkt hopeloos en er valt verder niets te vereenvoudigen, maar laten we eens kijken naar de afstanden van (a, b) tot de cirkels... De afstand van (a, b) tot $(0,0)$ is natuurlijk $\sqrt{a^2 + b^2}$ en de afstand van (a, b) tot de linker cirkel is: $\sqrt{a^2 + b^2} - 1$

De afstand "links" moet gelijk zijn aan de afstand rechts....

$$\sqrt{a^2 + b^2} - 1 = \sqrt{(c - a)^2 + b^2} - (c - 1) \quad \dots \text{wortels!}$$

Dan maar kwadrateren?....(wel eerst die $c - 1$ naar links brengen!)

Vooruit dan maar:

$$\sqrt{a^2 + b^2} + c - 2 = \sqrt{(c - a)^2 + b^2} \quad \text{geeft:}$$

$$a^2 + b^2 + 2(c - 2)\sqrt{a^2 + b^2} + c^2 - 4c + 4 = (c - a)^2 + b^2$$

eerst eens uitwerken; isoleren en "vegen":

$$2(c - 2)\sqrt{a^2 + b^2} = c^2 - 2ac + a^2 + b^2 - a^2 - b^2 - c^2 + 4c + 4$$

$$\Leftrightarrow 2(c - 2)\sqrt{a^2 + b^2} = 4c - 2ac - 4 \quad (\text{nu eerst alles delen door } 2:)$$

$$\Leftrightarrow (c - 2)\sqrt{a^2 + b^2} = 2c - ac - 2 \quad (\text{en nog eens kwadrateren...:})$$

$$(c^2 - 4c + 4)(a^2 + b^2) = 4c^2 + a^2c^2 + 4 - 4ac^2 - 8c + 4ac$$

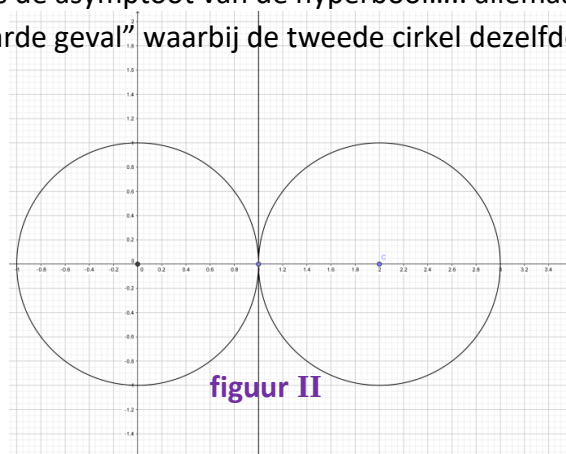
$$\Leftrightarrow 8c - 4c^2 - 4 = 4a^2c - 4ac^2 - 4a^2 + 4ac - 4b^2 + 4b^2c - b^2c^2 \quad (4) !!!$$

Het klopt als een bus!

De tekening hierboven (**figuur I**) toont naast de basiscirkels met middelpunten $(0,0)$ en $(c,0)$ enkele extra cirkels die raken aan de gegeven twee cirkels;

De gemeenschappelijke raaklijn(-en) van de eerste twee cirkels zie je de x -as snijden in het punt $(\frac{c}{2-c}, 0)$ (ga maar na)

en de cirkels raken in de punten R en S. De lijn door het midden van RS, die loodrecht staat op de raaklijn is de asymptoot van de hyperbool..... allemaal uit te drukken in c ! Hieronder het "ontaarde geval" waarbij de tweede cirkel dezelfde straal heeft dus met middelpunt: $(2,0)$

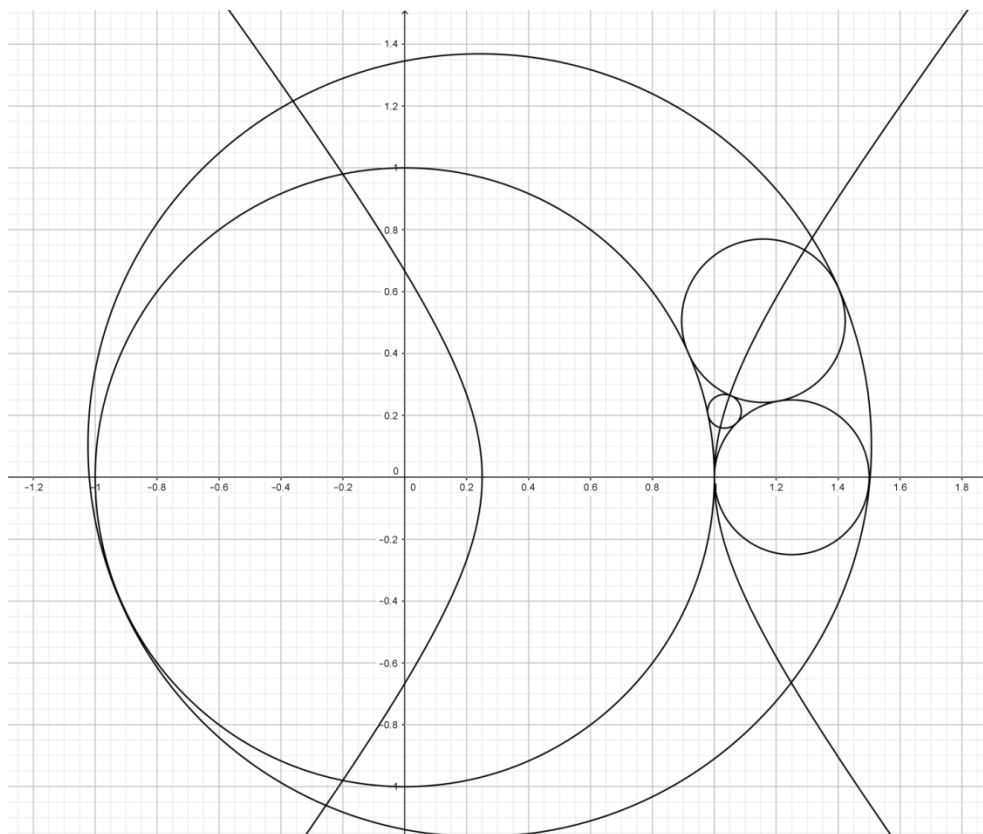


In plaats van een hyperbool is het de lijn $x=1$ waarop de punten liggen met gelijke afstand tot de twee cirkels.

De vraag is natuurlijk: waarom, waarvoor?

Welnu: De Grote Uitdaging is: Het probleem van Apollonius of De Stelling van Descartes te bewijzen!

Hoe luidt die? Als drie cirkels elkaar raken en een vierde cirkel raakt deze drie (hetzij inwendig, hetzij uitwendig) dan is er een vergelijking met de stralen van deze cirkels; of als dit beter uitkomt (...) met de omgekeerden van die stralen (de zogenaamde krommingen)....



We beschouwen enkele rakende cirkels: **figuur III**

Hier is omwille van duidelijkheid expres het assenstelsel en een indeling getoond.

De middelgrote cirkel is die met vergelijking $x^2 + y^2 = 1$

Een kleinere (*) cirkel raakt in het punt (1,0) en heeft middelpunt(c,0)

Elke derde cirkel die de twee vorige cirkels raakt heeft een middelpunt op de hyperbool!

Datzelfde geldt voor een vierde cirkel die alle vorige drie cirkels raakt;

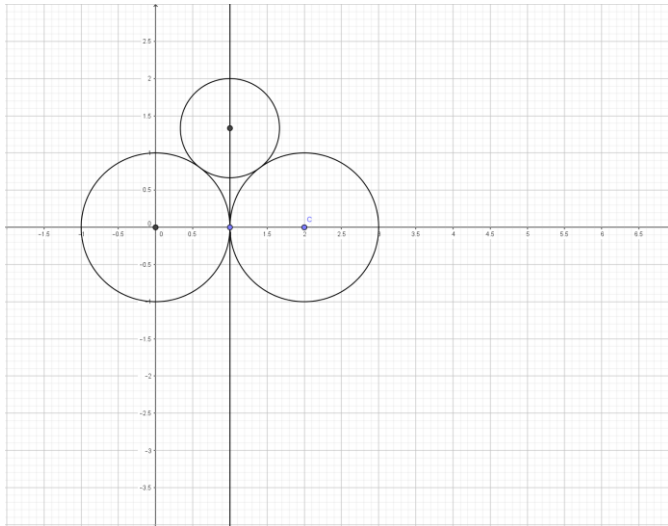
het middelpunt ervan ligt hetzij op de “rechtertak” van de hyperbool (klein ingeschreven cirkeltje) of op de “linkertak”; deze cirkel raakt aan de buitenzijde – zie figuur III.

Het komt erop neer dat de eerste cirkel middelpunt (0,0) heeft en straal 1;

de tweede cirkel (c,0) als middelpunt heeft en straal $c-1$; de derde cirkel heeft als

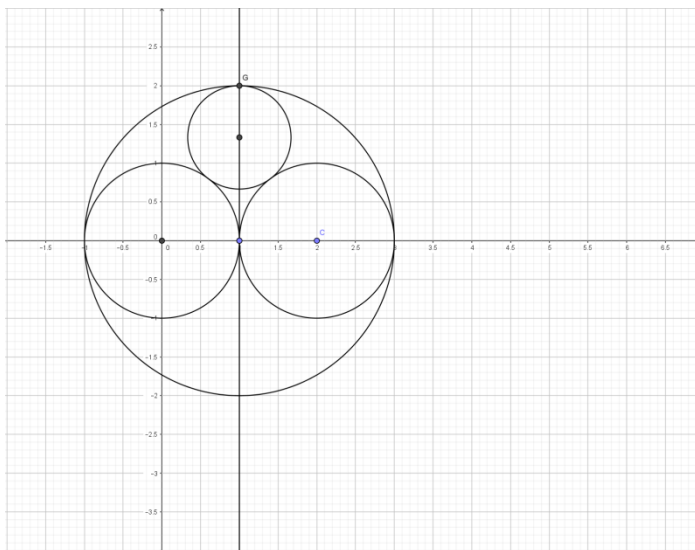
middelpunt (a,b) en straal r , waarbij aan die waarden voorwaarden/eisen zijn gesteld....
ze moeten voldoen aan de Stelling van Adriaan van Roomen!

En de vierde cirkel OOK!



En in het “ontaarde geval”? Zie de figuur hierboven: **figuur IV**

De vierde cirkel die ze alle drie moet raken heeft een middelpunt binnen de driehoek gevormd door de middelpunten, deze raakt “inwendig” OF hij raakt “uitwendig”!



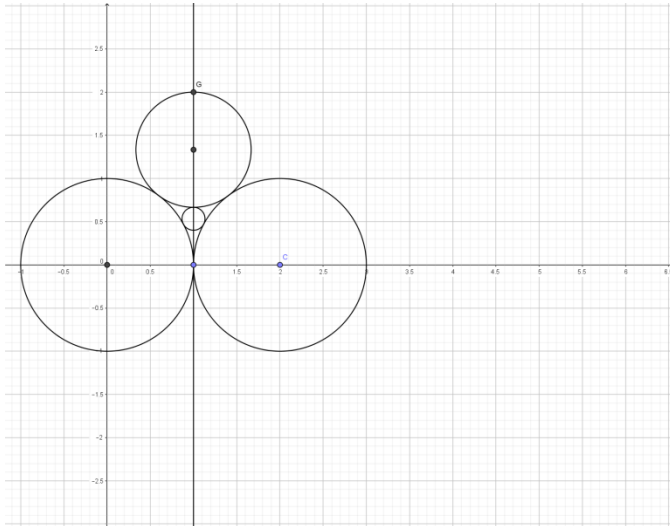
Zie de figuur hierboven: **figuur V (“uitwendig”)**

De vierde cirkel die ze alle drie moet raken heeft een middelpunt binnen de driehoek gevormd door de middelpunten, deze raakt “inwendig” OF hij raakt “uitwendig”!
Hierboven zie je een mogelijkheid... Bij “toeval” is het middelpunt van de omhullende vierde cirkel precies $(1,0)$!

Dat hoeft in het algemeen niet het geval te zijn... Wel ligt het middelpunt altijd op de lijn $x=1$

Dat het dit keer zo mooi uitkomt heeft te maken met de stralen van de drie cirkels. Descartes noemt het “krommingen”.

De straal van de “inwendig” rakende vierde cirkel is veel kleiner (zijn kromming juist groter),



zie figuur VI hieronder:

figuur VI (“inwendig”)

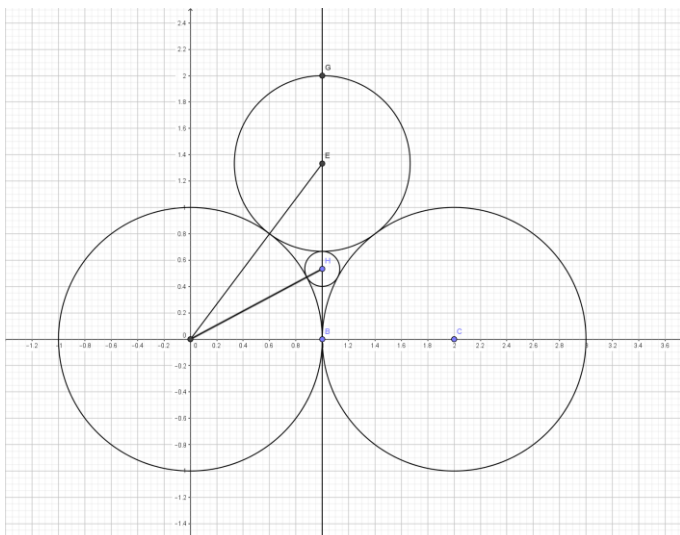
Niet alles komt echter “mooi” uit....

Als de straal van de derde cirkel precies 1 is dan kun je met Pythagoras in de driehoeken OBE en OBH nog wel wat, dan blijkt de straal van de kleine (ingeschreven) cirkel $\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1$ en van de omhullende cirkel $\frac{2}{3}\sqrt{3} + 1$. (ga maar na)

Maar zelfs al heb je de situatie dat de stralen van de eerste twee cirkels precies lengte 1 hebben en de derde cirkel een onbekende lengte R heeft dan kun je met Pythagoras wel aan de slag.... zie figuur VII

figuur VII

Noem de straal van de kleine cirkel r (kleine r om deze te onderscheiden van de straal R van



de derde cirkel (met middelpunt E). Dan geldt: $HB^2 + 1 = (r + 1)^2$ dus $HB = \sqrt{r^2 + 2r}$
 Nu Pythagoras in driehoek OBE: $BE^2 + 1 = (R + 1)^2$ dus $BE = \sqrt{R^2 + 2R}$

Opgeteld moet gelden $HB + r + R = BE \Leftrightarrow HB + r = BE - R$

Maar de wortel-vergelijking $\sqrt{r^2 + 2r} + r = \sqrt{R^2 + 2R} - R$ laat zich niet makkelijk oplossen!

Kwadrateren geeft uiteindelijk: $r^2 + r + r \cdot \sqrt{r^2 + 2r} = R^2 + R - R\sqrt{R^2 + 2R}$

Hier lopen we helaas vast... En tot mijn verbazing werkt een simpel "cartesisch bewijs" dit keer NIET.

Descartes lanceerde destijds het begrip kromming: $k = \frac{1}{r}$ voor de kromming van de kleine cirkel en $K = \frac{1}{R}$ voor de kromming van de grote (derde) cirkel.

De kromming van de basiscirkels is door de keuze van hun straal gewoon 1

Hij ontdekte dat $k = 2 + K + 2 \cdot \sqrt{1 + 2K}$ Hoe?Geen idee!

In het algemeen stelt hij dat de kromming van de kleine cirkel is:

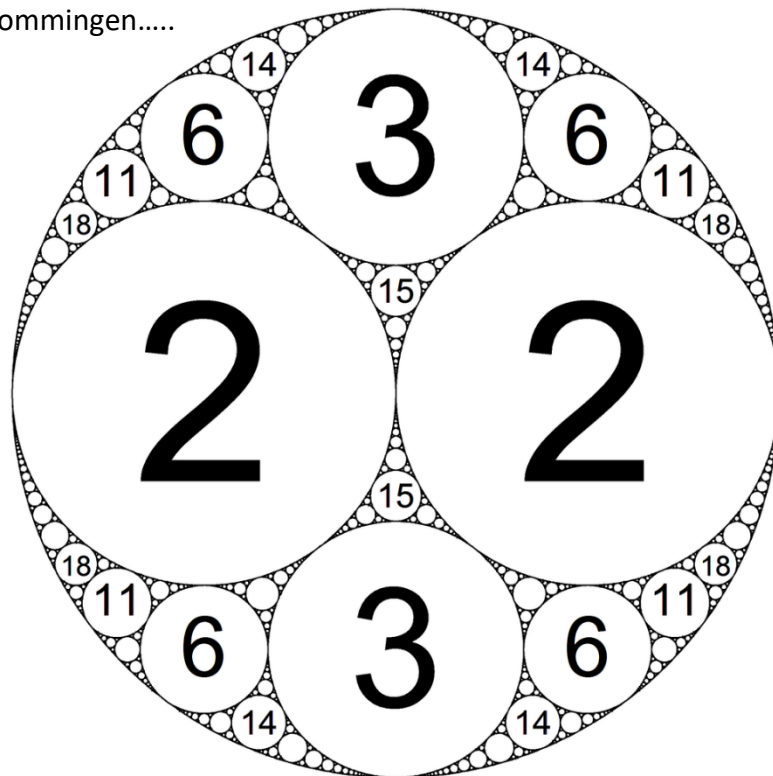
$$k_4 = k_1 + k_2 + k_3 + 2 \cdot \sqrt{k_1 \cdot k_2 + k_1 \cdot k_3 + k_2 \cdot k_3} \quad (5)$$

En de kromming van de omhullende (grote) cirkel is:

$$K_4 = k_1 + k_2 + k_3 - 2 \cdot \sqrt{k_1 \cdot k_2 + k_1 \cdot k_3 + k_2 \cdot k_3} \quad (6)$$

De vierde cirkel is nu nog steeds niet "construeerbaar", maar er is wel méér over bekend!

Hieronder zie je een illustratie uit 1788 van Hotta Jinsuke die gebruik maakte van de vergelijking en van de krommingen.....



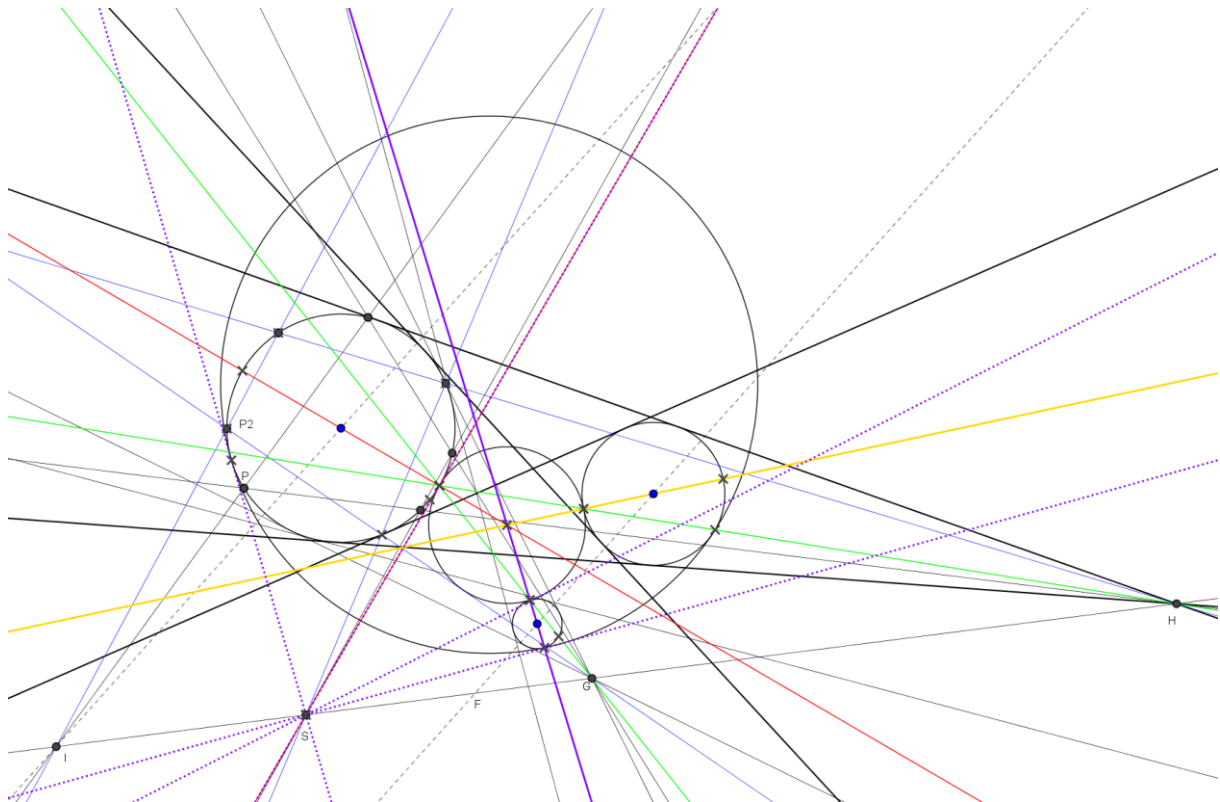
Adriaan van Roomen bepaalde destijds de middelpunten van de kleine inwendig rakende cirkel en van de grote uitwendige rakende ("omhullende") cirkel door twee paren cirkels te nemen met hun beide hyperbolen. De tweede hyperbool sneed de eerste op de "linkertak" en op de andere (rechter) "tak".

Niet geniaal.... Maar wel simpel te bewijzen....

Erger was dat het in die tijd "niet-construeerbaar" was (constructies met louter passer en liniaal vormden een wiskundige sport van het hoogste niveau destijds, maar ook in de eeuwen daarna)!

Een voorname wiskundige uit die tijd: Francois Viète toonde Adriaan een betere oplossing ; Adriaan zocht deze wiskundige op en zij werden goede vrienden. Dat was in de tijd van de godsdienstoorlogen niet zonder gevaar! Men belandde als wetenschapper zoals Giordano Bruno, of Galileo Galilei (bijna) soms zomaar (door de "Inquisitie") op de brandstapel!

De constructie:



Deze afbeelding **figuur VI** is gemaakt in Geogebra en toont het vernuft van de meetkunde! ... Het idee is om de "basislijn" door de punten F, G en H van waaruit telkens twee gemeenschappelijke raaklijnen kunnen worden getrokken te gebruiken.... Op deze "basislijn" zoeken we een "basis-punt" S van waaruit de raaklijn aan de eerste en de gezochte cirkel kan worden getrokken.

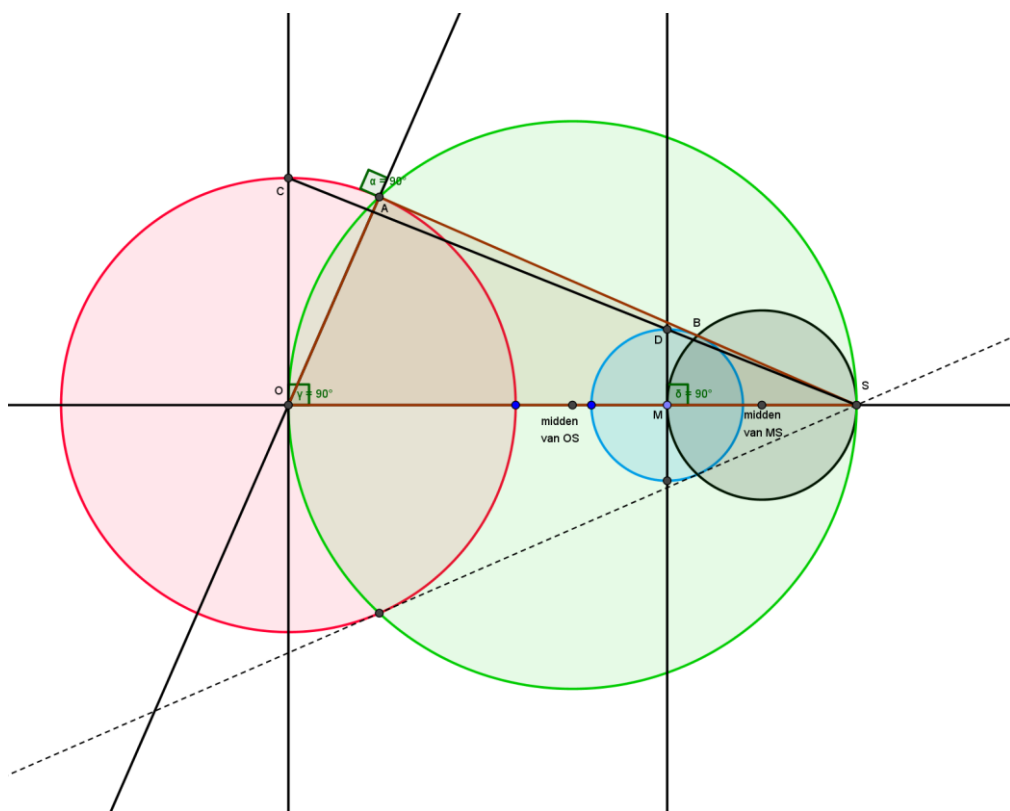
Om dit punt te vinden trekken we de “gestippelde” hulplijn door de middens van de tweede en derde cirkel en verplaatsen die evenwijdig tot die door het midden van de eerste cirkel loopt en vinden zo het snijpunt (I) met de basislijn. Dan volgt een verbazende ingreep: vanuit een **willekeurig** punt P op de eerste cirkel trekken we lijnen naar H en I.... Deze snijden de eerste cirkel in 2 punten waarvan de verbindingslijn de basislijn snijdt in het gezochte punt S. Neemt men in plaats van punt P een ander punt (P_2) op de eerste cirkel dan krijg je hetzelfde punt S ...in de tekening is dat in de kleuren blauw en rood gedaan!

Het is een wirwar van lijntjes! En het construeren van bijvoorbeeld een raaklijn aan een cirkel door een willekeurig punt buiten die cirkel is iets dat we bijna verleerd zijn! Het gaat met behulp van de Stelling van Thales met gemak...kijk nog eens naar die Stelling....

Hieronder zie je een interactieve link naar bovengenoemde tekening, waarbij je de (blauwe) punten kunt verslepen, verplaatsen; de cirkels groter en kleiner kunt maken.....maar steeds hetzelfde resultaat ziet: de cirkels die de drie inwendig en uitwendig raken!

<https://ggbm.at/qbzfydeR>

Een deel van de constructie wordt hieronder toegelicht:



figuur VIIinteractief te zien via de link: <https://www.geogebra.org/m/NKbtMFmu>

Hoe je bij twee gegeven cirkels (in de figuur hierboven de rode cirkel met middelpunt (0,0) en de blauwe cirkel met middelpunt M ...ergens op de horizontale as....) twee gemeenschappelijke raaklijnen en ook raakpunten kunt construeren zie je hierboven.

Het maakt gebruik van een **willekeurig** (!) punt C op de eerste (rode) cirkel en als men de lijn door dit punt C en het middelpunt van de (eerste) cirkel evenwijdig verplaatst: naar het 2^e middelpunt (van de blauwe) cirkel snijdt die lijn de cirkel in onder andere een punt D....

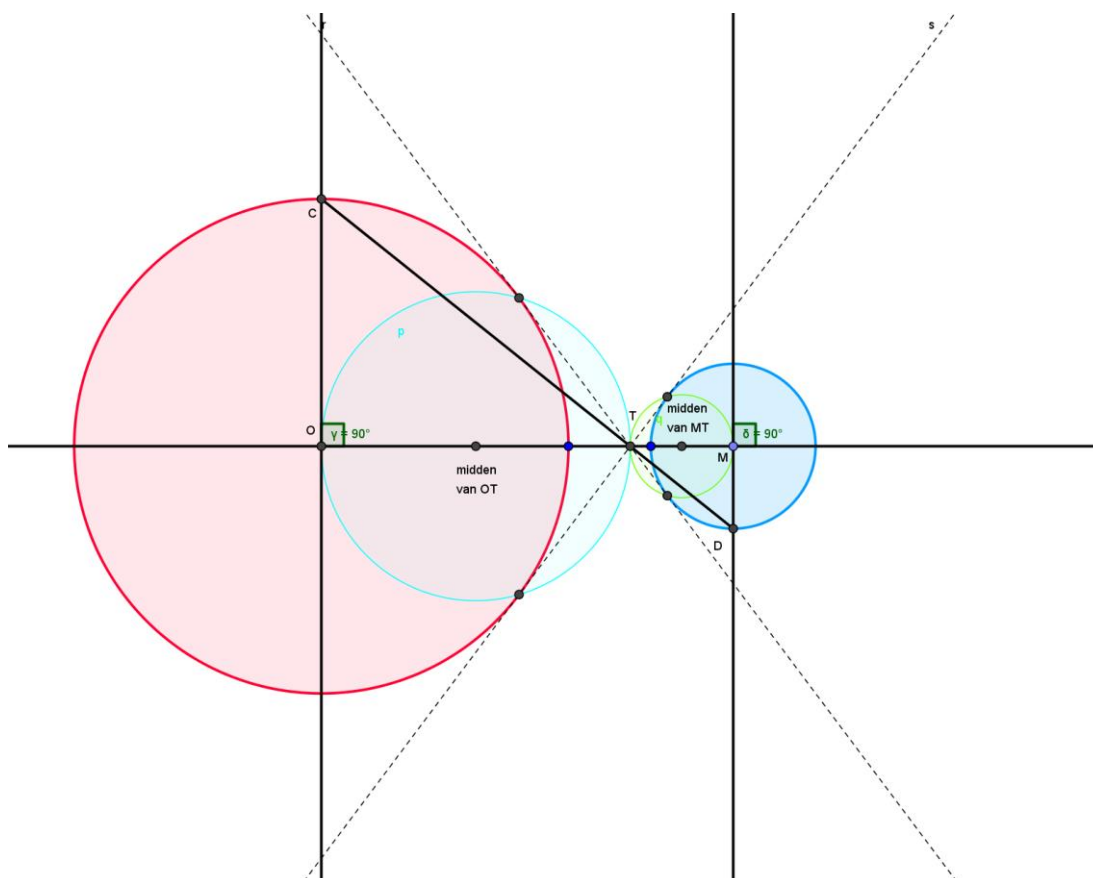
Lijn CD snijdt dan de horizontale as in het gezochte “basispunt” S. In het voorbeeld hierboven is het “uitwendige” basispunt getoond.

Een gemeenschappelijke raaklijn vormt een hoek van 90 graden met de straal die naar het raakpunt voert.... En nu komt Thales van pas: Met punt A het raakpunt op de eerste (rode) cirkel is driehoek OAS een rechthoekige driehoek waarvan punt A dus ligt op de cirkel met middellijn OS en met passer en liniaal is het midden van lijnstuk OS te vinden en een cirkel te trekken met het midden van OS en straal: de helft van lijnstuk OS: de groene cirkel!

Analoog kan men het raakpunt B op de andere (blauwe) cirkel vinden . . . nu met het midden van lijnstuk MS. Punt S wordt in de literatuur ook wel “gelijkvormigheidspunt” genoemd; vanuit dit punt kan men de ene cirkel vergroten/verkleinen tot de ander...

Nam men in plaats van het punt D aan de bovenzijde die aan de onderzijde dan vindt men het snijpunt T waarbij de raaklijnen “inwendig snijden”...zie figuur VIII.

Nog een laatste opmerking: Men mag een willekeurig punt C op de eerste cirkel nemen; er ontstaan duidelijk gelijkvormige driehoeken. Wij hebben hierboven het makkelijkst denkbare punt genomen, op de verticale as. Zodoende is hierboven $\angle DMS = \angle COS = 90^\circ$



figuur VIII en de link naar het interactieve applet:

<https://www.geogebra.org/m/VUqZn4XS>

Het Probleem van Apollonius is meetkundig opgelost. De kracht van de constructie ligt in het vinden van die basislijn gevormd door de drie “gelijkvormigheidspunten”. De vraag is of dit alles zich laat vertalen in/op een algebraïsche wijze.

Descartes zelf probeerde het eerst op een speciale situatie: Hoe een vierde rakende cirkel beschreven kan worden uit de ligging (middelpunten en stralen) van **drie reeds rakende cirkels**.

en gaf als Stelling voor een vierde rakende cirkel :

$$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 = 2k_1^2 + 2k_2^2 + 2k_3^2 + 2k_4^2$$

met de krommingen (“curvatures”) $k_1; k_2; k_3$ en k_4

Deze vergelijking en het verband met (5) en (6) is zo subliem, dat het werkelijk “plezant” is om te verifiëren:

Uit $k_4 = k_1 + k_2 + k_3 \mp 2 \cdot \sqrt{k_1 \cdot k_2 + k_1 \cdot k_3 + k_2 \cdot k_3}$ volgt: $k_4 - k_1 - k_2 - k_3 = \mp 2 \cdot$

$\sqrt{k_1 \cdot k_2 + k_1 \cdot k_3 + k_2 \cdot k_3}$ en (met kwadrateren)

volgt: $k_4^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - 2k_4 \cdot k_1 - 2k_4 \cdot k_2 - 2k_4 \cdot k_3 + 2k_1 \cdot k_2 + 2k_1 \cdot k_3 + 2k_2 \cdot k_3 =$

$4 \cdot (k_1 \cdot k_2 + k_1 \cdot k_3 + k_2 \cdot k_3) = 4 \cdot k_1 \cdot k_2 + 4k_1 \cdot k_3 + 4k_2 \cdot k_3$

$\Leftrightarrow k_4^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - 2k_4 \cdot k_1 - 2k_4 \cdot k_2 - 2k_4 \cdot k_3 - 2k_1 \cdot k_2 - 2k_1 \cdot k_3 - 2k_2 \cdot k_3 = 0$

Omgekeerd geldt:

$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 = 2k_1^2 + 2k_2^2 + 2k_3^2 + 2k_4^2 \Leftrightarrow$

$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 + 2k_1 \cdot k_2 + 2k_1 \cdot k_3 + 2k_1 \cdot k_4 + 2k_2 \cdot k_3 + 2k_2 \cdot k_4 + 2k_3 \cdot k_4 =$

$2k_1^2 + 2k_2^2 + 2k_3^2 + 2k_4^2 \Leftrightarrow$

$2k_1 \cdot k_2 + 2k_1 \cdot k_3 + 2k_1 \cdot k_4 + 2k_2 \cdot k_3 + 2k_2 \cdot k_4 + 2k_3 \cdot k_4 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2$

En de blauwe regels vormen een “perfect match”.....

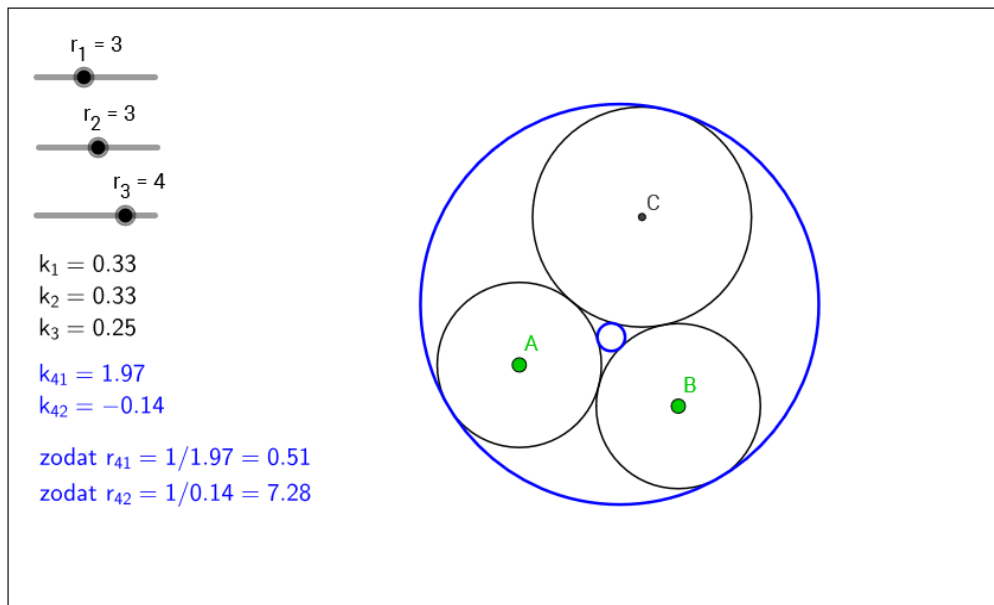
Toen ik op internet zocht of er al een Geogebra-plaatje bestond stuitte ik op het werk van Chris Cambré die een simpel appletje in Geogebra heeft gemaakt met als bijschrift:

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = 2(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2$$

waarin de kwadraat-tekens precies verkeerd staan! Het kostte mij een poosje rekenwerk voor ik achter die fout kwam!

Zijn applet werkt echter aardig (niet foutloos...) en de link plaats ik hieronder:

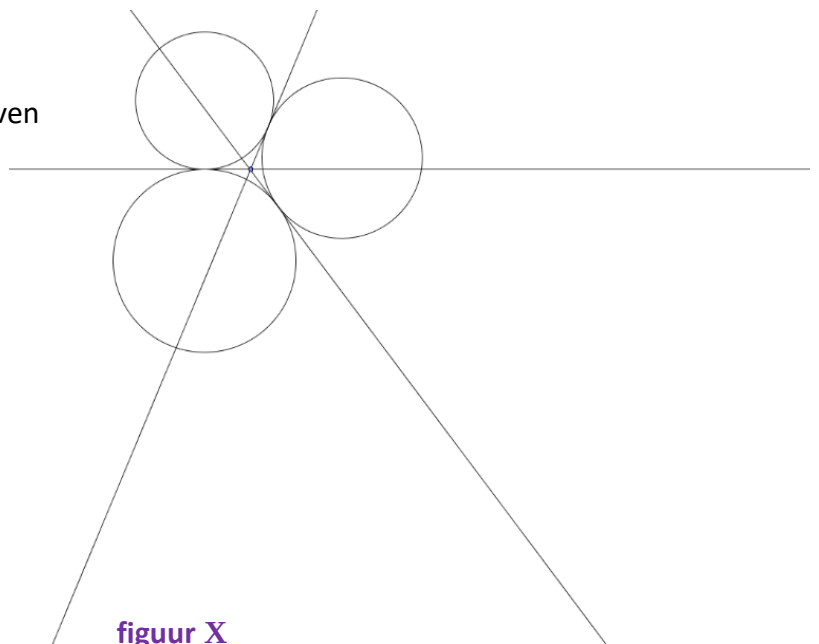
Deze interactieve applet werkt misschien niet direct in dit document en zal ik ook in de indexlijst als URL plaatsen: [Applet in Geogebra van Chris Cambré](#)



figuur IX

Deze interactieve applet werkt misschien niet direct in dit document en zal ik ook in de indexlijst als URL plaatsen.

Wat steeds opvalt is dat het lijkt alsof het middelpunt van de kleine ingeschreven cirkel het snijpunt is van de raaklijnen, zoals al eens eerder is getoond



figuur X

Als je echter heel precies kijkt dan zie je dat zulks niet hoeft te kloppen, behoudens een irregulier ("ontaard") geval (zoals: alle stralen gelijk). En als je in figuur III goed kijkt dan zie je dat het middelpunt van zo'n inwendig rakende cirkel NIET een snijpunt van (raak-) lijnen is....met name niet op de verticale raaklijn $x = 1$ (maar ietwat rechts daarvan...ja op die hyperbool) ligt.

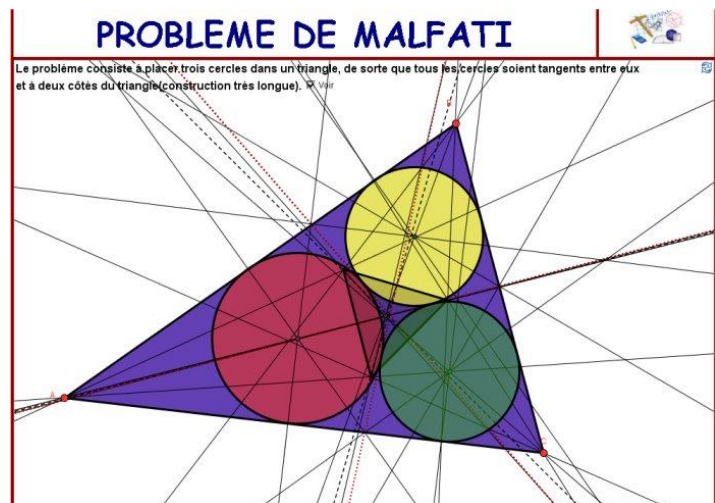
Door de eeuwen heen bleef het probleem van Apollonius en vergelijkbare problemen zoals die van Malfati zie hieronder: de mens bezig houden!

Descartes gaf een beperkte en: niet-algebraïsche oplossing.... die omgekeerden zitten (mij en diverse andere wiskundigen) een beetje dwars!

In 1936 was het Frederick Soddy die een nieuwe poging waagde de Stelling van Descartes te bewijzen.

Mijn eerste vraag was:

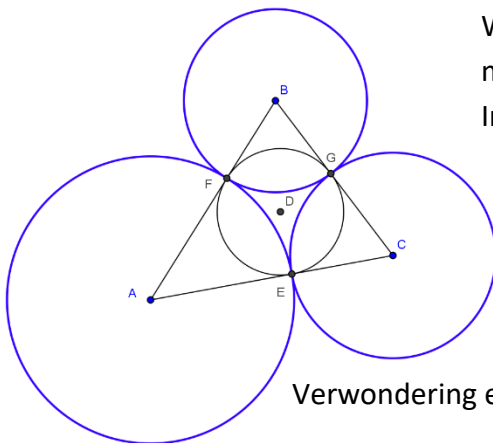
Hoe krijg je zomaar 3 rakende cirkels:



Welnu men neme een hulpcirkel met daarvan 3 willekeurige raaklijnen....

Waar die raaklijnen elkaar snijden vind je de middelpunten van de drie cirkels.

In de figuur hiernaast zijn dat A, B en C.



Hiervan bestaat ook een interactieve link die ik vond op internet van ene M. O'loughlin en deze Geogebra-applet werkt perfect!!!

<https://www.geogebra.org/m/a4APrvTr>

Verwondering en enige verbazing krijg je bij het zien van deze figuur!

Maar ook herkenning en inzicht! Want die hulpcirkel binnen die driehoek ABC ...is dat niet de ingeschreven cirkel van die driehoek?.... Die is toch bepaald door de deellijnen van de hoekpunten A, B en C?!... Daarvan hebben WIJ toch een Cartesisch bewijs, hier ergens op de website staan? En van die ingeschreven cirkel hebben WIJ (dan) toch de straal (uitgedrukt in de coördinaten!)

Dus als men drie punten (met coördinaten) geeft dan kunnen wij DE drie rakende cirkels "maken" met die middelpunten maken (zelfs de coördinaten en alles geven)!

In een vervolgdokument (winter 2017 ?) komen we hierop terug!

Valkenisse augustus 2017