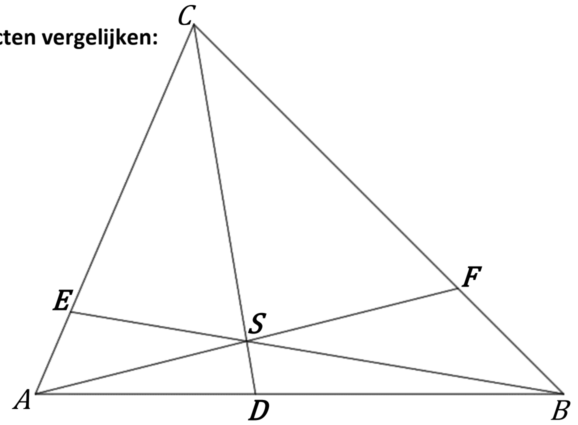
LUIDT: Als men op de zijden van een willekeurige driehoek ABC punten D, E en F legt op resp. AB; AC en BC en de lijnen AF; BE en CD gaan precies door één punt S, dan geldt de volgende vergelijking: $\frac{AD}{BD}\cdot\frac{BF}{CF}\cdot\frac{CE}{AE}=1$

Opmerking: lijnen vanuit de hoekpunten van een driehoek die door een punt gaan noemt men ook wel “CEVIANEN”. Dit zouden bijvoorbeeld kunnen zijn: zwaartelijnen; of hoogtelijnen of deellijnen. . . . etc.

In plaats van de 3 verhoudingen kun je ook de producten vergelijken:
$AD\cdot BF\cdot CE = BD\cdot CF\cdot AE$
(En wij gaan – vanwege Pythagoras – hun kwadraten vergelijken. . . . .)

In de figuur hiernaast is gekozen voor $A(0,0)$; $B(1,0)$ en $C(a,b)$ . . .



Idee van het bewijs:
eerst snijpunt S maken van lijnen BE en CD. Dan een vgl. van lijn AS opstellen en vervolgens lijn AS snijden met BC om de coördinaten van punt F uit te drukken in a en b.
We vullen dan die gegevens in (samen met $AD=c$, vanwege de keuze van punt $D(c,0)$ en $E(ad,bd)$ waarbij d de (verkleinings-) factor is die hoort bij punt E op zijde AC (“ten opzichte van” punt C) . . . .
Het lijkt allemaal zo simpel maar brengt een heleboel vergelijkingen teweeg. . . . een enorme wirwar van ingewikkelde breuken met variabelen a, b, c en d. En bijna aan het eind komt een stuk inzicht (ʘʘ) ....namelijk dat vereenvoudigen en buiten haakjes halen –simpele algebra– zinvol is!
We beginnen met de vergelijkingen van lijnen, zoals: $AB:\quad y=0$

lijn BE: $y=\frac{bd}{ad-1}\cdot(x-1)$

lijn CD: $y=\frac{b}{a-c}\cdot(x-c)$

gelijkstellen en kruiselings vermenigvuldigen:

$$\frac{bd}{ad-1}\cdot(x-1)=\frac{b}{a-c}\cdot(x-c)$$

$$\frac{bd(a-c)-b(ad-1)}{(ad-1)(a-c)}\cdot x=\frac{bd}{ad-1}-\frac{bc}{a-c}\Leftrightarrow$$

$$\frac{abd-bcd-abd+b}{(ad-1)(a-c)}\cdot x=\frac{bd(a-c)}{(ad-1)\cdot(a-c)}-\frac{bc(ad-1)}{(a-c)\cdot(ad-1)}$$

dus $x=\frac{abd-bcd-abcd+bc}{b-bcd}$ en: $x_S=\frac{ad-cd-acd+c}{1-cd}$

en $x_S-1=\frac{ad-cd-acd+c}{1-cd}-\frac{1-cd}{1-cd}=\frac{ad-acd+c-1}{1-cd}=\frac{(ad-1)(1-c)}{1-cd}$ (en dit laatste is “inzicht”. . . ʘʘ)

Want met invullen in de vgl. van lijn BE: $y=\frac{bd}{ad-1}\cdot(x-1)$ krijgen we:

$$y_S=\frac{bd}{ad-1}\cdot\frac{(ad-1)(1-c)}{1-cd}=\frac{bd-bcd}{1-cd}$$ (Nu kon de $ad-1$ worden weggestreept)

Daarmee is de vgl. van lijn AS: $y=\frac{y_S}{x_S}\cdot x$ ofwel: $y=\frac{bd-bcd}{ad-cd-acd+c}\cdot x$

deze gaan we snijden met BC : $y=\frac{b}{a-1}\cdot x-\frac{b}{a-1}$ en vinden met gelijkstellen:

$\left(\frac{bd-bcd}{ad-cd-acd+c} - \frac{b}{a-1}\right)\cdot x = \frac{b}{1-a}$ (. . . naar de andere kant gebracht…)

Het vereenvoudigen links leidt tot: $\left(\frac{bd-bcd}{ad-cd-acd+c} + \frac{b}{1-a}\right)\cdot x = \frac{b}{1-a}$ **en met gelijknamig maken:**

$\left(\frac{(bd-bcd)(1-a)}{(ad-cd-acd+c)(1-a)} + \frac{b(ad-cd-acd+c)}{(ad-cd-acd+c)(1-a)}\right)\cdot x = \frac{b}{1-a} \Leftrightarrow$

$\left(\frac{(bd-bcd)(1-a)}{(ad-cd-acd+c)} + \frac{b(ad-cd-acd+c)}{(ad-cd-acd+c)}\right)\cdot x = \frac{b}{1} \Leftrightarrow$

$x\cdot\big((bd-bcd) - abd + abcd\big) + b(ad-cd-acd+c) = b\cdot(ad-cd-acd+c)$ **dus:**

$x\cdot((d-cd)+(-cd+c) = (ad-cd-acd+c)$ **dus**

$x\cdot(d-2cd+c) = ad-cd-acd+c$ **en** $x_F = \frac{ad-cd-acd+c}{d-2cd+c}$

Op BC **:** $y = \frac{b}{a-1}\cdot x - \frac{b}{a-1}$ **ligt dan punt** F **met** $y_F = \frac{b}{a-1}\cdot\frac{ad-cd-acd+c}{d-2cd+c} - \frac{b}{a-1}$

$$y_F = \frac{b}{a-1}\cdot\frac{ad-cd-acd+c}{d-2cd+c} - \frac{b}{a-1}\cdot\frac{(d-2cd+c)}{(d-2cd+c)}$$

$$= \frac{abd-bcd-abcd+bc-bd+2bcd-bc}{(a-1)\cdot(d-2cd+c)} = \frac{(a-1)\cdot(bd-bcd)}{(a-1)\cdot(d-2cd+c)} = \frac{bd-bcd}{d-2cd+c}$$ (weer een truukje!)

Hierboven is nogal wat gebeurd!....

Ga je verder zonder te vereenvoudigen... dan krijg je verderop véél termen, die je niet meer herkent als veelvouden van expressies die precies tot een "match" (hadden) kunnen leiden! Het kan nog verder, bijvoorbeeld door bij de teller wat buiten haakjes te halen....

Merk op dat y_F er tamelijk simpel ("mooi"?....) uit ziet!

We gaan nu beginnen aan $x_F - x_B = \frac{ad-cd-acd+c}{d-2cd+c} - 1 = \frac{ad-cd-acd+c}{d-2cd+c} - \frac{d-2cd+c}{d-2cd+c} =$

$\frac{ad+cd-acd-d}{d-2cd+c}$ **de noemer kan (net als hieronder) nog netjes op alfabetische volgorde gezet worden…**

$y_F - y_B = \frac{bd-bcd}{c-2cd+d} - 0 = \frac{bd-bcd}{c-2cd+d}$ **hiermee maken we verderop** BF^2 **....**

We zetten eens de diverse lengten (of hun kwadraten) op een rijtje:

$AD^2 = c^2$

$AE^2 = a^2d^2 + b^2d^2 = (a^2+b^2)d^2$

$CE^2 = (a-ad)^2 + (b-bd)^2 = \{a^2+b^2\}\cdot(1-d)^2$

$BD^2 = (1-c)^2$ … laat gewoon staan! . . .uitschrijven is niet zo'n goed idee....

De "lastigste" is CF **:**

$$x_C - x_F = a - \frac{ad-cd-acd+c}{d-2cd+c} = \frac{ac-acd+cd-c}{c-2cd+d}$$

$$y_C - y_F = b - \frac{bd-bcd}{d-2cd+c} = \frac{bc-bcd}{c-2cd+d}$$

Hiermee maken we verderop $CF^2 = (x_C - x_F)^2 + (y_C - y_F)^2$ **(...Pythagoras...)**

Merk op dat we bij beide expressies c **nog buiten haakjes (hadden) kunnen halen!**

Wij nemen de kwadraten in de expressie: $AD\cdot BF\cdot CE = BD\cdot CF\cdot AE$

en we gaan bewijzen dat: $AD^2\cdot BF^2\cdot CE^2 = BD^2\cdot CF^2\cdot AE^2$

$$AD^2 \cdot BF^2 \cdot CE^2 = c^2 \cdot \left\{\frac{(ad+cd-acd-d)^2+(bd-bcd)^2}{(c-2cd+d)^2}\right\} \cdot \{a^2+b^2\} \cdot (1-d)^2$$

$$BD^2 \cdot CF^2 \cdot AE^2 = (1-c)^2 \cdot \left\{\frac{(ac-acd+cd-c)^2+(bc-bcd)^2}{(c-2cd+d)^2}\right\} \cdot (a^2+b^2)d^2$$

De expressies passen nog net op één regel…..ze moeten identiek zijn dus vereenvoudigen we door bij de bovenste d^2 buiten haakjes te halen in het stuk van BF^2 … die staat namelijk ook al in AE^2…

… de noemers mogen ook weg:

$$c^2d^2 \cdot \{(a+c-ac-1)^2+(b-bc)^2\} \cdot \{a^2+b^2\} \cdot (1-d)^2 \qquad (*)$$

zou nu gelijk moeten zijn aan:

$$(1-c)^2 \cdot \{(ac-acd+cd-c)^2+(bc-bcd)^2\} \cdot (a^2+b^2) \cdot d^2 \qquad (**)$$

Voorts halen we in (**) bij de tweede factor c^2 buiten haakjes en krijgen dan:

$$c^2d^2 \cdot (1-c)^2 \cdot \{(a-ad+d-1)^2+(b-bd)^2\} \cdot (a^2+b^2) \quad (***)$$

In (*) en in (***) delen we de factor c^2d^2 weg en houden (netjes op volgorde gezet) over:

$$\{(a+c-ac-1)^2+(b-bc)^2\} \cdot \{a^2+b^2\} \cdot (1-d)^2 \qquad \text{(uit *)} \qquad \text{en}$$

$$(1-c)^2 \cdot \{(a+d-ad-1)^2+(b-bd)^2\} \cdot (a^2+b^2)$$

Dat de expressies hierboven identiek zijn is met enig inzicht nu al te zien ! Het was ook al aangekondigd, toen we zagen dat er veel meer buiten haakjes kon worden gehaald!

Om te beginnen halen we de factor a^2+b^2 bij beide expressies weg en krijgen de expressies : (λ) en (ρ)

$$\{(a+c-ac-1)^2+(b-bc)^2\} \cdot (1-d)^2 \quad (\lambda) \qquad \text{“λ van links”}$$

$$(1-c)^2 \cdot \{(a+d-ad-1)^2+(b-bd)^2\} \quad (\rho) \qquad \text{“ρ van rechts”}$$

Verder gaan we nog eens goed kijken naar de eerste factor waarbinnen staat: $(a+c-ac-1)^2$ Zonder kwadraat staat er $a+c-ac-1$ en wat direct opvalt is dat je daar 1−c buiten haakjes kunt halen!! $a+c-ac-1=(a-1)(1-c)$

Op pagina 2 werd het vermoeden al uitgesproken dat factoren zoals 1−c buiten haakjes konden worden gehaald… ꝏ

Analoog voor de term $(b-bc)^2 = b^2 \cdot (1-c)^2$ Op die manier worden (λ) en (ρ)

$$\{(a-1)^2(1-c)^2+b^2 \cdot (1-c)^2\}.(1-d)^2 = \{(a-1)^2+b^2\} \cdot (1-c)^2 \cdot (1-d)^2 \quad (\lambda) \quad \text{en:}$$

$$\ldots = (1-c)^2 \cdot \{(a-1)^2+b^2\} \cdot (1-d)^2 \qquad (\rho)$$

Dat deze laatste twee expressies identiek zijn is duidelijk!

Het is beslist NIET de bedoeling om bij (*) en (**) alle producten geheel uit te schrijven; dat vergt 72 (12 keer 6) termen vol risico op schrijffouten vanwege allerlei combinaties van letters en machten (zelfs derde en vierde machten)…(misschien…“leuk strafwerk”?…maar…NIET VOOR MIJN LEERLINGEN!!…) ꝏ

Valkenisse, april 2018