www.raves.nl
ton@raves.nl

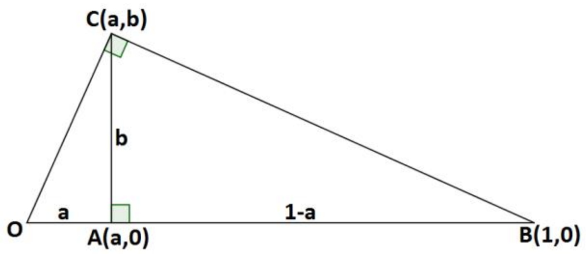
EEN STELLING IN EEN RECHTHOEKIGE DRIEHOEK

LUIDT:

Als de hoogtelijn vanuit het hoekpunt van de rechte hoek wordt getrokken dan verdeelt hij de overstaande zijde ("hypotenusa") in 2 stukken met lengten p en q , zodat de hoogte h vanuit de rechte hoek voldoet aan de vergelijking: $h^2 = p \cdot q$

IDEE VAN HET BEWIJS

We kiezen een assenstelsel zo dat de schuine zijde ("hypotenusa") precies op de x-as ligt en het linker hoekpunt precies de Oorsprong (0,0) is….



Je kunt dan voor het rechterhoekpunt B kiezen uit coördinaten als (1,0) … kwestie

van vergroten of verkleinen. We moeten hier gaan bewijzen dat:

$b^2 = a \cdot (1 - a)$

Ons gereedschap: Pythagoras in driehoek OAC; in driehoek ABC en in driehoek OBC.

OPMERKINGEN

Het bewijs kan ook uitgevoerd worden met de Oorsprong (0,0) als het "hoogtepunt"; het snijpunt van de hoogtelijn met de hypotenusa, bijna net zo (weinig) werk!
Langer duurt het bewijs als je de rechte hoek (C) in de Oorsprong legt;
hoekpunt A op de x-as en hoekpunt B op de y-as. Wij nemen hierboven $0 < a < 1$

BC EN OC

De richtingscoëfficiënten van de lijnen BC en OC zijn respectievelijk: $\frac{b}{a-1}$ en $\frac{b}{a}$

Het product hiervan is $\frac{b^2}{a^2-a}$ Het product hiervan moet −1 zijn omdat BC en OC loodrecht op elkaar staan!

En $b^2 = a - a^2$ volgt direct als je kruiselings vermenigvuldigt in $\frac{b^2}{a^2-a} = -1$ KLAAR!

ALTERNATIEF

Gewoon "Pythagorassen" in de driehoeken geeft: $OC^2 = a^2 + b^2$

$$BC^2 = (1-a)^2 + b^2$$

Dit vullen we in bij de derde (grote) driehoek: $OC^2 + BC^2 = OB^2 = 1$

en vinden: $a^2 + b^2 + (1-a)^2 + b^2 = 1 \quad \Leftrightarrow$

$$a^2 + b^2 + 1 - 2a + a^2 + b^2 = 1$$

$2b^2 - 2a + 2a^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 = a - a^2$ (klaar!)

Valkenisse juli 2017