www.raves.nl
ton@raves.nl

DE HOOGTELIJNENSTELLING (DRIEHOEK)

LUIDT: De drie hoogtelijnen in een willekeurige driehoek snijden elkaar precies in één punt.

IDEE VAN HET BEWIJS: We kiezen een assenstelsel zo dat een hoekpunt de oorsprong (0,0) is en het tweede hoekpunt (1,0) is (na eventuele vergroting/verkleining). We maken dan de eerste 2 hoogtelijnen en hun snijpunt en bewijzen dan dat dit op de derde ligt.

OPMERKINGEN: Als het derde hoekpunt precies op de y-as ligt, dan krijg je een triviaal geval (… het snijpunt van de eerste 2 hoogtelijnen is dan: $O(0{,}0)$……en dat ligt als hoekpunt van waaruit men start al op de derde hoogtelijn) We kunnen dus aannemen dat er een lijn is met vergelijking: $y = ax$, waar dat derde hoekpunt $Q(r, ar)$ op ligt, met aanname $a \neq 0$. Verder is er de aanname dat $r \neq 0$ (er moet wel een echte driehoek zijn!)

EERSTE 2

We hebben dus $O(0{,}0)$; $P(1{,}0)$ en $Q(r{,}ar)$ en maken de eerste hoogtelijn: vanuit Q loodrecht op OP: dit is de verticale lijn $x = r$.
De hoogtelijn vanuit P loodrecht op OQ heeft richtingscoefficient m waarvoor geldt: $a \cdot m = -1$ en vergelijking: $\boldsymbol{y = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{a}}$
deze snijden in het punt $\boldsymbol{H(r, \frac{1-r}{a})}$

DERDE

De derde hoogtelijn vanuit O loodrecht op PQ heeft een richtingscoëfficiënt die (net als hiervoor) omgekeerd en tegengesteld dient te zijn in dit geval met de richtingscoëfficiënt van PQ en die laatste is: $\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{ar}{r-1}$
De derde hoogtelijn heeft dus vergelijking: $y = \frac{1-r}{ar} \cdot x$

INVULLEN

Vullen we nu $x_H = r$ in die derde vergelijking in dan kun je de r wegstrepen en hou je precies de y-coördinaat van H over : $\frac{1-r}{a} = y_H$

En klaar is het bewijs!

NAWOORD:

Merk op dat dit bewijs werkelijk elegant en kort is! Er is zelfs geen tekening nodig!! Niks meetkunde; pure algebra!!!
Ik vermoed dat dhr. R. Cartesius zelf dit al eens (zo) heeft opgeschreven….

Bij een bewijs dat de 3 bissectrices van de hoeken van een driehoek door één punt gaan werkt dat minder fraai.
Daar is het slim om direct de eigenschap van elke bissectrice ter hand nemen dat het punten bevat die gelijke afstanden hebben tot de benen van de betreffende hoek; je werkt dan toe naar de straal van de "*ingeschreven"* cirkel van die driehoek.
Evengoed is het toch mogelijk ook die stelling cartesisch te bewijzen! Het kan met vectorvoorstellingen waarbij men de truc gebruikt dat als je de richtingsvectoren gelijke lengte geeft en dan optelt je een somvector krijgt
("als de diagonaal van een ruit") die vanwege symmetrie (in een ruit) de hoek precies doormidden deelt.
Dat doe je voor twee hoeken en je krijgt dan het snijpunt van die deellijnen, waarna verder de afstanden tot de benen van de derde hoek worden bekeken en vergeleken.
Het kan wel direct met vergelijkingen maar dan is er een hulpstelling nodig die eerst wordt bewezen in: **afstandformule**.
Kijk eens in de indexlijst naar de **deellijnenstelling** !
Mocht je het je afvragen… ja ook de **zwaartelijnenstelling** (in een driehoek) is zo te bewijzen!
(*De drie zwaartelijnen in een driehoek snijden elkaar in precies één punt…… en bovendien in stukken die zich verhouden als 2:1*).