Samenvatting Meetkunde H10 en H14 G&R 6VWO wisk B september 2019 ©SERVA

H10

afst. van **punt** P **tot lijn** l: $ax + by + c = 0$ (altijd op nul herleiden. En altijd tekenen!)

a. M.b.v. hulploodlijn $k \perp l$ $met\ k$: $bx - ay = b \cdot x_P - a \cdot y_P$
snijden met l : vgl'n. combineren (x of y vrijmaken /elimineren…) : snijpunt S
indien mogelijk uit tek. halen, maar dan wel verifiëren/controleren!
Vervolgens met Pythagoras afst.: $\sqrt{(x_P - x_S)^2 + (y_P - y_S)^2}$ (& vereenv 'n…)

b. M.b.v. afst..-formule: $\frac{|a \cdot x_P + b \cdot y_P + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (vereenvoudigen: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ niet zo laten staan)

afst. van lijn k tot lijn l : neem een willekeurig punt op de eerste lijn: P
ga nu zoals boven verder: $\boldsymbol{d(P, l)}$ (kan natuurlijk alleen als $k\ //\ l$)

afst. van punt P tot cirkel $(x - x_M)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$ (na **kwadraat afsplitsen** *)
is: $\sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2} - r$ $(d(P, M) - r)$

afst. van lijn l tot cirkel
is: $d(M, l)\ - r$ (vaak kun je die afst. in een tekening "zo zien"… wel verifiëren)

afst. van cirkel c_1 tot cirkel c_2 (eerst schetsen!)

a. **c_1 buiten cirkel c_2**
is: $\boldsymbol{d(M_1, M_2) - r_1 - r_2}$ (*)

b. **c_1 binnen cirkel c_2**
is: $\boldsymbol{r_2 - d(M_1, M_2) - r_1}$ (*)

vector : lijnstuk met richting; beginpunt nog niet vast voorbeeld: $\overrightarrow{AB}$
plaatsvector: ,, ,, ,, met beginpunt O(0,0) voorb. $\overrightarrow{OA}$ of $\vec{a}$

vectorvoorstelling van een lijn: $\vec{v} = \vec{a} + \mu \cdot (\vec{b} - \vec{a})$ of $\binom{x}{y} = \binom{x_A}{y_A} + \lambda \cdot \binom{x_A - x_B}{y_A - y_B}$
(in oudere boeken vaak genoteerd als $\underline{v} = \underline{b} + t \cdot (\underline{a} - \underline{b})$ zoals in een parametervoorstelling)
2 lijnen snijden (met vect.-voorst'n "vv") : naast λ bij de andere lijn andere letter (μ) nemen.

raaklijn l aan cirkel: door (gegeven) punt R **op** die cirkel:
altijd via de eigenschap dat raaklijn l ⊥ RM ("die" straal…) (kan vaak zonder algebra…tek.!)

raaklijn(-en) door punt P buiten cirkel:
kijk eerst in de tek. of er roosterpunten R zijn die voldoen aan: $PR \perp RM$,
(een eventuele verticale raaklijn kun je dan snel bepalen..) zo niet gebruik dan
$d(M, raaklijn) = straal\ (r)$ eerst b elimineren (wegdelen) in $ax + by + c = 0$
$(tot: \quad ax + 1 \cdot y + c = 0)$ met c ook uitgedrukt in a, door de coördinaten van P in te vullen ,
dan krijg je: $\frac{|a \cdot x_P + y_P + c\,|}{\sqrt{a^2+1}} = r \overset{*}{\Rightarrow} a = ..$
(* nu kwadrateren en kruiselings vermenigvuldigen)

Opdracht 1 : geef vgl'n. v.d. raaklijnen door P(6,10) aan c: $x^2 + y^2 - 2x = 24$

vectoren.. wat kun je ermee? Optellen; aftrekken en vermenigvuldigen met een getal…en:

inwendig product: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ac + bd$ (dit hangt af van de lengten en de cosinus van de hoek..)

om precies te zijn: $\cos\left(\angle(\vec{a}, \vec{b})\right) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ (die uitkomst kan negatief zijn: stompe hoek!)

hoek tussen 2 lijnen l **en** m (altijd scherpe hoek zoeken)

a. met $rc'n$: $rc_l = \tan(\alpha)\,;\tan(\beta) = rc_m$ (in graden..) $|\alpha - \beta| \approx \cdots$ (evt. van 180° halen)

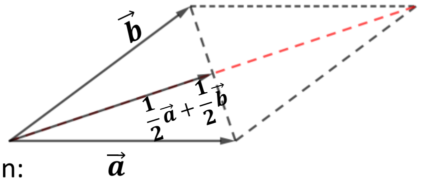
b. met richtingsvectoren ($rv'n$): $\cos(k, l) = \dfrac{|\,\overrightarrow{rv_l} \cdot \overrightarrow{rv_m}\,|}{|\overrightarrow{rv_l}| \cdot |\overrightarrow{rv_m}|}$

wat verder met vectoren: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (handig bij loodlijnen)

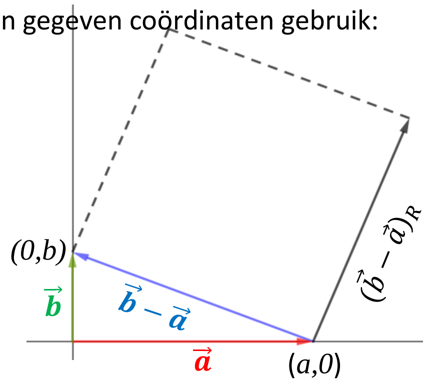
en als $\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ dan zijn even lang en loodrecht: $\vec{a}_L = \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix}$ en $\vec{a}_R = \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$ (rechtsom: min onder)

bij 't uitdrukken van coördinaten/vectoren (bijv. van middens) in gegeven coördinaten gebruik:
"kop-staart-methode"

(merk op dat hier toevallig een ruit is….)



en met name bij vierkanten:



$\vec{b} - \vec{a}$ is vector $\overrightarrow{AB}$ met $A(a,0)$ en $B(0,b)$

en **lijn** AB heeft vectorvoorstelling: $\vec{v} = \vec{a} + \mu \cdot (\vec{b} - \vec{a})$

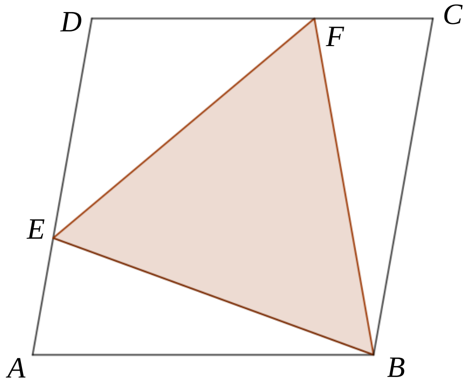
maar je kunt ook gebruiken: $\vec{v} = \vec{b} + \lambda \cdot (\vec{a} - \vec{b})$

Je hoeft niet altijd moeilijk te doen met vectoren; met gezond verstand (en schets) kom je heel ver:

Opdracht 2: Gegeven de punten $A(a,0)$ en $C(3a,0)$. Bepaal de waarde van p zodat hoekpunt D van vierkant $ABCD$ op de lijn $y = px$ ligt.

Bij driehoeken worden vaak hoeken gezocht …..indien benaderen toegestaan is: met sinusregel of cosinusregel evt. verdubbelingsformules en m.b.v. de GRM. . . . indien de berekening exact moet: gebruik dan dat in elke gelijkbenige driehoek de basishoeken gelijk zijn; de somregel van een driehoek; **koordenvierhoekstelling**; Thales; gebruik verhoudingen bij gelijkvormige driehoeken en bovenal: gezond verstand!

Opdracht 3: In parallellogram $ABCD$ ligt een gelijkzijdige driehoek: $\Delta\, BEF$ met gelijkbenige driehoeken met tophoeken B en D als in de figuur: dus met $AB{=}BE$ en $BF{=}BC$ en $DE{=}DF$
Bereken exact alle hoeken in de figuur.



Vectorvoorstellingen hoeven niet uitsluitend van lijnen te zijn.

De plaatsvector van een punt P dat een baan volgt zoals van een **cirkel** is: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

De schrijfwijze met accolades: $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ is makkelijker dan bijv. $\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ (wat heb jij het liefst?)

Krommenonderzoek: altijd de **snijpunten** van de kromme **met de assen** (exact) bepalen.

Bepaal de **snelheidsvector**: $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix}$ (doorgaans langs raaklijn aan kromme)

en desgevraagd de **versnellingsvector**: $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} f''(t) \\ g''(t) \end{pmatrix}$ (kan een heel andere richting hebben)

De **baansnelheid** van P op tijdstip t=t_0 is: $|\vec{v}(t_0)| = \sqrt{f'(t_0)^2 + g'(t_0)^2}$ (of: $v(t_0)$ …)

baanversnelling is: $a(t_0) = \dfrac{\vec{v}(t_0) \cdot \vec{a}(t_0)}{v(t_0)}$ (of: $\boldsymbol{a_b(t_0)}$ . . . let op! Deze uitkomst kan negatief zijn!)

Opm.: **niet** eerst t_0 invullen en daarna gaan differentiëren… dan wordt er veel nul…(t laten staan!)
eerst alle componenten uitschrijven….

Raaklijn // *x-as* $g'(t_0) = 0$ EN $f'(t_0) \neq 0$ (of: $y'(t) = 0$ & $x'(t) \neq 0$)

// *y-as* (vice versa)

H14

Sinus- en cosinusregel: (uitkijken: bij cosinusregel kan uitkomst van cos(hoek) negatief zijn!
Dan is die hoek gewoon stomp)

Bij sinusregel kan een uitkomst bijvoorbeeld zijn: $\sin(a) = 0{,}5$ pas op! $a = 30°$ OF $a = 150°$
(tegenover de grootste zijde ligt de grootste hoek . . . . en zet je GRM in graden…)

Maak altijd eerst een schets!

Opdracht 4: Bereken $\angle ABC$ in ΔABC met a=8; b=9 en c=18……

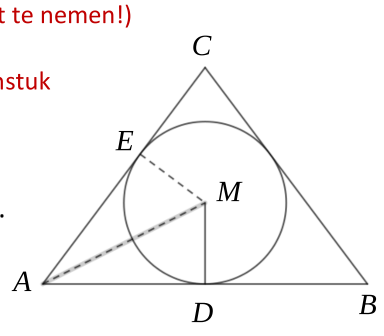
Bekende Pythagorasverh'n :	$1:1:\sqrt{2}$	3 : 4 : 5	7 : 24 : 25	9 : 40 : 41
	$1:\sqrt{3}:2$	5 : 12 : 13	8 : 15 : 17	…

Stellingen (die je direct mag gebruiken bij bewijzen en berekeningen:)

1. **Thales** (kijk ook bij de stellingen in H8 en H10.)
2. **Symmetrie bij raaklijnen** vanuit een punt P **aan een** gegeven **cirkel**: raakpunten Q en R: **PQ=PR**
3. **Gelijkvormigheid** (soms is een vergrotingsfactor zichtbaar; soms een Z- of F-figuur)
4. **Van Aubel**
5. **ALS** $rc_l \cdot rc_m = -1$ **DAN** $l \perp m$ (probeer een geval met een verticale lijn apart te nemen!)

Vergelijkingen in meetkundige figuren: Stel de lengte van het gevraagde lijnstuk of een (kleiner en makkelijker door te rekenen stuk:) $\boldsymbol{x}$

Voorbeeld: In **gelijkbenige** driehoek ABC is: AB= 6; AC=BC=5,
Het middelpunt M van de **ingeschreven cirkel** ligt op de hoogtelijn vanuit C.
Dit is lijnstuk CD in de figuur. **Bereken MC.**
Slim is het om te stellen: $MD = \boldsymbol{x}$



(zie stellingen nr 2. :) $AD=AE=3$, $\angle ADM=90°$ in $\Delta\ CDA$ blijkt $CD=4$

Nu gaan we m.b.v. Pythagoras in $\Delta\ CEM$ toerekenen naar $MC= 4-x$: met $CE=5-3=2$

$2^2 + x^2 = (4 - x)^2$ en dit is de sleutelvgl. . . . . (opdracht 5)

Bij berekeningen naar bijv. **oppervlakte**: Opp $\Delta\ ABC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin(\angle A)$

zijde x hoogte-methode...

Bij berekeningen (bijv. naar hoeken) kun je gebruiken: SOSCASTOA . . .

$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$ waaruit o.a. volgt:

sin(2a)=2 sin(a) ·cos(a) (verdubbelingsformule)

$\sin(3a) = \sin(a + 2a)$ = ... (pas op! $\sin(3a) \neq 3\sin(a)$ en . . . $\sin(3a) \neq 3\sin(a)\cos(a)\ldots$)

$\boldsymbol{\cos(2a) = 2cos^2(a) - 1 = 1 - 2sin^2(a)}$

Deellijnen (bissectrices) 1. **Ruitmethode** (richtingsvectoren even lang maken *)

2. m.b.v. **afstandsformule** (de uitkomst: 2 lijnen loodrecht op elkaar!*)

Zwaartepunten

constructie: figuur onderverdelen **op twee manieren** in telkens 2 deelfiguren (driehoeken?) waarvan de zwaartepunten (makkelijk?) getekend kunnen worden en verbonden tot een zgn. "steunlijn". De twee verkregen **steunlijnen** snijden dan in het gezochte zwaartepunt Z **.**

zwaartelijnstelling:

De 3 zwaartelijnen van een willekeurige driehoek snijden elkaar precies in één punt in stukken die zich verhouden als 2:1**.** Hiermee zijn de coördinaten van Z van $\Delta\ ABC$ dus uit te rekenen volgens:

$A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$ en $C(x_C, y_C)$ $x_Z = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C)$ en $y_Z = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C)$

momentenstelling: (punt-) massa's m_1, m_2, m_3, m_4, ... met totale massa: $M = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \ldots$

op afstanden tot "0" : (in een bepaalde richting): $z = \frac{1}{M}(m_1 a_1 + m_2 a_2 + \cdots)$

en i.h.a. geldt: voor het zwaartepunt van massa's in punten A_1, A_2, A_3 , ... $\vec{z} = \frac{1}{M}(m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + \cdots)$

(evt. ontbinden in richtingen langs x-as ; y-as en z-as)

Een selectie van meetkunde-vraagstukken om te oefenen is: (boek deel 4 van Getal & Ruimte)

HOOFDSTUK 16 (§16.5) Met op blz'n 192 t/m 196 een PRACHTIGE samenvatting!! Bestudeer die goed)

(2012-I) opg 46 en 47

(2012-II) opg 48 en 49

(2013-I) opg 50

(2013-II) opg 51 en 53

(2014-I) opg 52, 54 en 55

(2014-II) opg 56 en 57

(2015-I) opg 58, 59 en 60

(2015-II) opg 61, 62 en 63

De meest belangrijke meetkunde-opgaven komen uit de recente jaren: 2016 t/m 2019