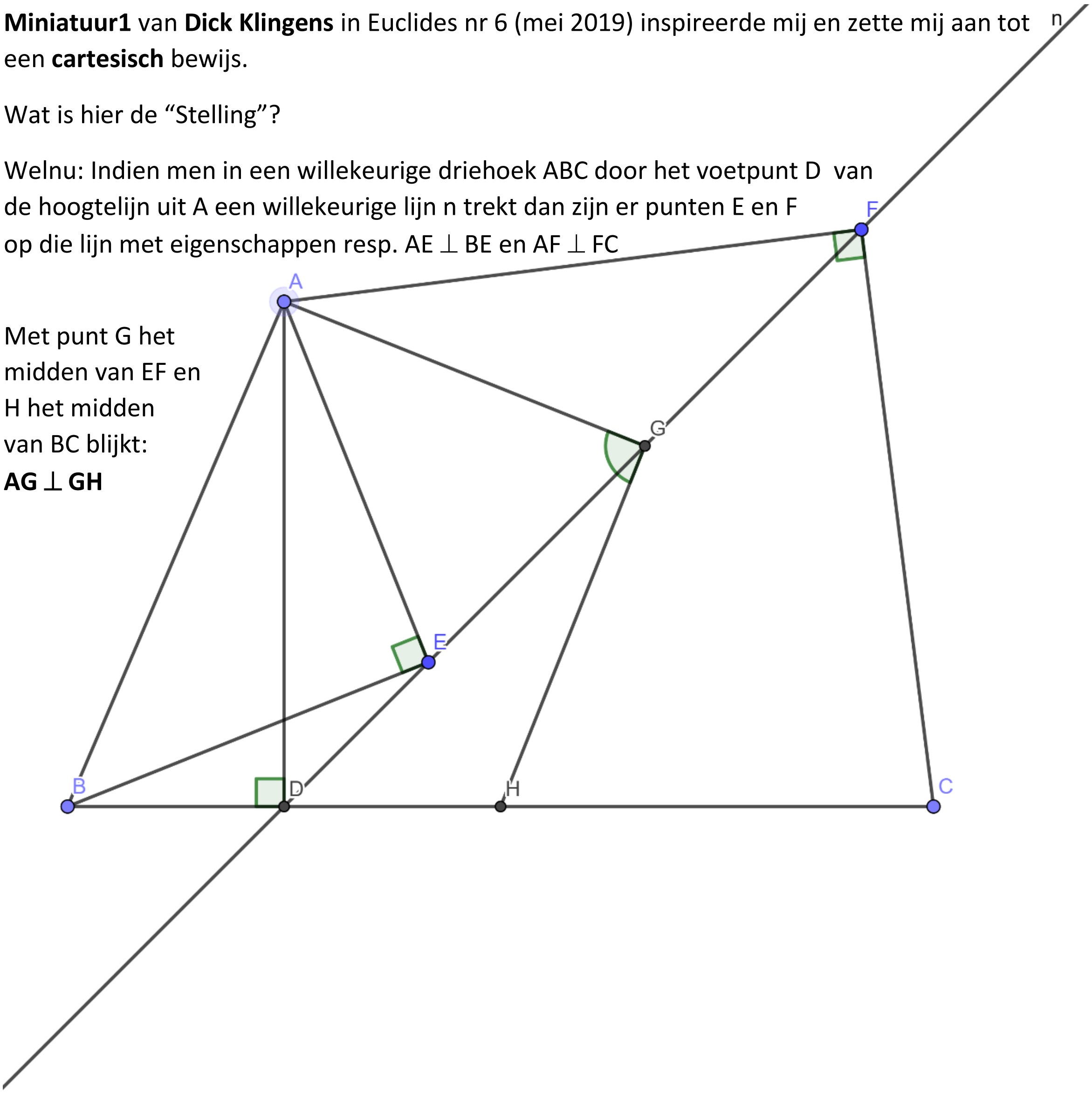
Miniatuur1 van **Dick Klingens** in Euclides nr 6 (mei 2019) inspireerde mij en zette mij aan tot een **cartesisch** bewijs.

Wat is hier de "Stelling"?

Welnu: Indien men in een willekeurige driehoek ABC door het voetpunt D van de hoogtelijn uit A een willekeurige lijn n trekt dan zijn er punten E en F op die lijn met eigenschappen resp. AE ⊥ BE en AF ⊥ FC

Met punt G het midden van EF en H het midden van BC blijkt: **AG ⊥ GH**



Het Bewijs: We kiezen dit keer voor de oorsprong (0,0) niet het linker hoekpunt (B), maar het voetpunt van de hoogtelijn vanuit A op zijde BC. Dan wordt de vergelijking van de willekeurige lijn door punt D (hopelijk) wat makkelijker….

Mijn intuïtie zegt me dat we voor C(1,0) -zoals gewoonlijk- kunnen kiezen, maar dan bevatten A en B nog wel elk een variabele. Voorstel is: B(b,0) en A(0,c). Dan is de derde variabele gereserveerd voor de richtingscoëfficiënt van de lijn door D….. Deze lijn werd in Geogebra na van alles en nog wat invoeren "n" genoemd en $rc_n = a$ ofwel de lijn gaat door D(0,0) en punt (1, a)

Helaas moeten we de uitzonderingssituatie van een verticale lijn later apart onderzoeken (*)

Wij nemen nu voorlopig aan dat b<0 ("B ligt links"…) en verder c>0 ("A boven D") …(**)

We hebben dus lijn n met vgl.: $y = ax$ e.e.a**. zoals in de tekening**!

De punten E en F voldoen hieraan en hebben dan coördinaten van de vorm: E(p, ap) en F(q, aq)

De waarden van p en q hangen af van de keuze van a, b en c en de letters zijn gekozen om niet in de war te raken met bijvoorbeeld een letter als "e", die in de wiskunde al "beladen" is…

AE heeft richtingscoëfficiënt: $rc_{AE} = \frac{ap-c}{p}$ en $rc_{BE} = \frac{ap}{p-b}$

$rc_{AE} \cdot rc_{BE} = -1$ dus $\frac{ap-c}{\mathbf{p}} \cdot \frac{a\mathbf{p}}{p-b} = -1$ en $a \cdot (ap - c) = b - p \Leftrightarrow$

$a^2p - ac = b - p \Leftrightarrow p + a^2p = b + ac$ en er volgt: $p = \frac{b+ac}{1+a^2}$ (1)

Nu q vrijmaken: $rc_{AF} = \frac{aq-c}{q}$ en $rc_{FC} = \frac{aq}{q-1}$

$rc_{AF} \cdot rc_{FC} = -1$ dus $\frac{aq-c}{q} \cdot \frac{aq}{q-1} = -1$ en er volgt: $q = \frac{1+ac}{1+a^2}$ (2)

Het midden van BC is punt H$(\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}, 0)$ en

$x_G = \frac{1}{2}\left\{\frac{b+ac}{1+a^2} + \frac{1+ac}{1+a^2}\right\}$ en $y_G = \frac{1}{2}a \cdot \left\{\frac{b+ac}{1+a^2} + \frac{1+ac}{1+a^2}\right\}$ of iets netter:

$x_G = \frac{\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}+ac}{1+a^2}$ en $y_G = a \cdot \frac{\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}+ac}{1+a^2}$

$$rc_{AG} = \frac{y_G - y_A}{x_G - x_A} = \frac{a \cdot \frac{\frac{1}{2}b + \frac{1}{2} + ac}{1 + a^2} - c}{\frac{\frac{1}{2}b + \frac{1}{2} + ac}{1 + a^2}}$$

$$rc_{GH} = \frac{y_G - y_H}{x_G - x_H} = \frac{a \cdot \frac{\frac{1}{2}b + \frac{1}{2} + ac}{1 + a^2}}{\frac{\frac{1}{2}b + \frac{1}{2} + ac}{1 + a^2} - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}}$$

Omdat zou moeten gelden: **AG ⊥ GH**

$$\frac{a \cdot \frac{\frac{1}{2}b + \frac{1}{2} + ac}{1 + a^2} - c}{\boldsymbol{\frac{\frac{1}{2}b + \frac{1}{2} + ac}{1 + a^2}}} \cdot \frac{a \cdot \boldsymbol{\frac{\frac{1}{2}b + \frac{1}{2} + ac}{1 + a^2}}}{\frac{\frac{1}{2}b + \frac{1}{2} + ac}{1 + a^2} - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}}$$

$= \frac{a \cdot \frac{\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}+ac}{1+a^2} - c}{\frac{\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}+ac}{1+a^2} - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}} \cdot a = -1$ en na kruiselings vermenigvuldigen:

$$a^2 \cdot \frac{\frac{1}{2}b + \frac{1}{2} + ac}{1 + a^2} - ac = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}b + \frac{1}{2} + ac}{1 + a^2}$$

We brengen nu de laatste term naar de linkerkant en krijgen:

$$(\boldsymbol{a^2 + 1}) \cdot \frac{\frac{1}{2}b + \frac{1}{2} + ac}{\boldsymbol{1 + a^2}} - ac = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}$$

En houden over: $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2} + ac - ac = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}$

En het klopt weer als een bus!

Als je een dergelijk cartesisch bewijs zelf voor het eerst probeert te leveren, dan is de geringste schrijffout al fataal en erg frustrerend! Je zoekt dan heel lang naar dat ene foutje en kijkt er telkens (opnieuw) over heen!

Het is belangrijk dat je elke stap verifieert, bijvoorbeeld bij het vrijmaken van de p:
Dat kan behalve met de regel $rc_{AE} \cdot rc_{BE} = -1$ ook gewoon met Pythagoras:
$AB^2 = b^2 + c^2 = BE^2 + AE^2 = \boldsymbol{a^2p^2} + (p-b)^2 + (c-ap)^2 + \boldsymbol{p^2}$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{b^2 + c^2} = (\boldsymbol{1 + a^2})p^2 + \boldsymbol{p^2} - 2bp + \boldsymbol{b^2 + c^2} - 2acp + \boldsymbol{a^2p^2}$$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{2(1 + a^2)}p^2 = 2bp + 2acp$ en onder de aanname dat $p \neq 0$: (*)

$(1 + a^2)p = b + ac$ en er volgt: $p = \frac{b+ac}{1+a^2}$ en dat is precies wat we op pagina 2 zagen: (1)

Valt er aan het eind **niet** alles weg, dan kan dat het gevolg zijn van een mintekentje dat verkeerd staat!Wat ook moet gebeuren is het bekijken van de speciale gevallen…. De uitzonderingen!

Wat als de willekeurige lijn door voetpunt D nu juist verticaal loopt? Nou…dan vallen de punten E en F samen met D! (*)

Voorts mag de eis dat b<0 gerust losgelaten worden! Of de driehoek nu scherphoekig of stomphoekig is maakt niet uit…. Een rechthoekige driehoek is een triviaal geval! Iets dergelijks geldt voor punt A….of dat nu “boven D”, of er onder ligt maakt ook niet uit! (**)
Dat geldt ook indien (bijvoorbeeld) de deling door $p - b$ een deling door nul zou opleveren…

Een bewijs met vectoren (en gebruik makend van inwendig product nul….) is evengoed mogelijk…. Maar laat ik aan de lezer!...deze “miniatuur” blijkt een cartesisch pareltje!

Ton Raves (www.raves.nl) augustus 2019, Valkenisse