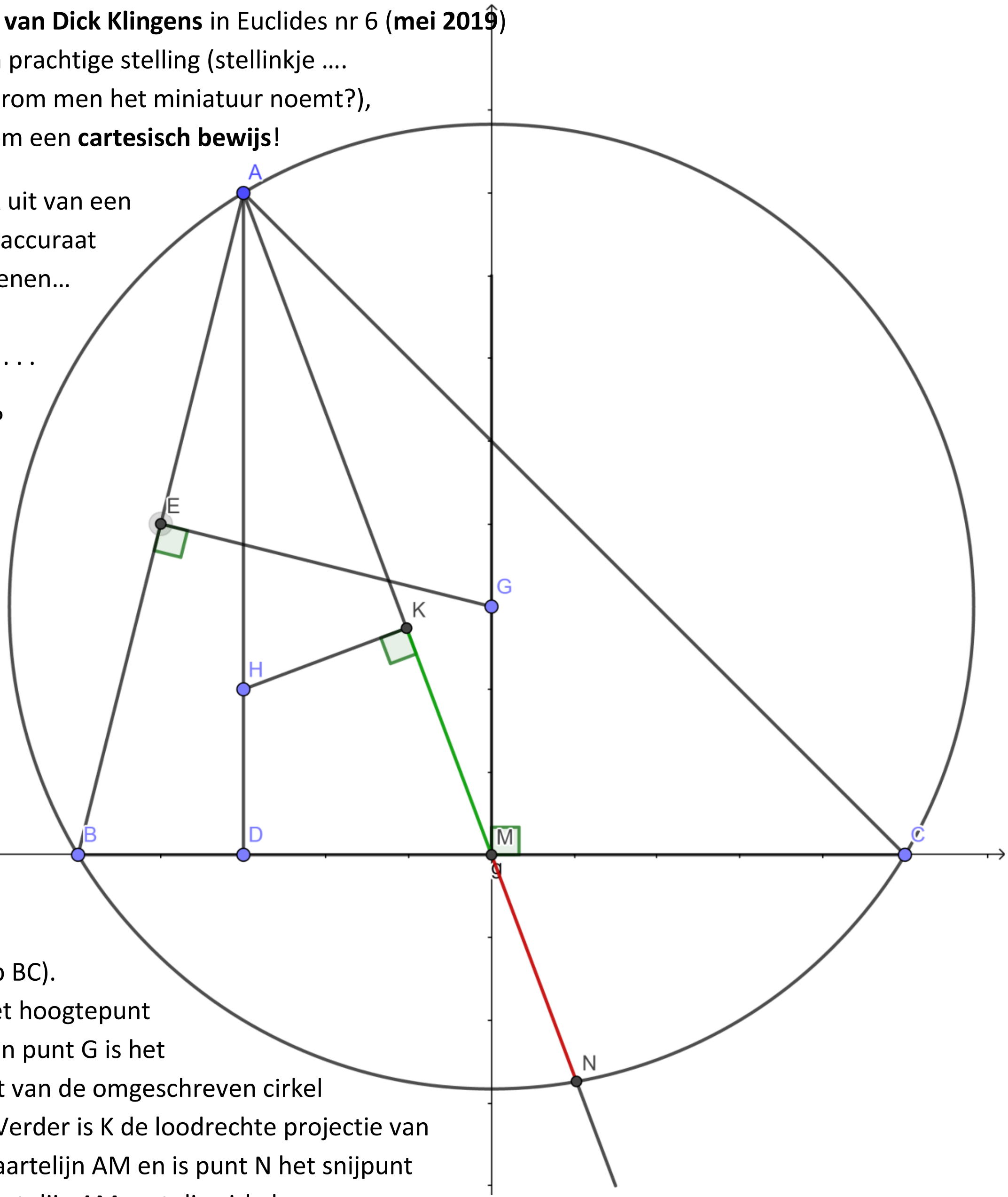
Miniatuur2 van Dick Klingens in Euclides nr 6 (**mei 2019**)
is weer zo'n prachtige stelling (stellinkje ….
…is dat waarom men het miniatuur noemt?),
die vraagt om een **cartesisch bewijs**!



Hierbij ga ik uit van een flinke dosis accuraat kunnen rekenen…

"de kunde" . . .

Kijk je mee?

Gegeven:
ΔABC
met
M het
midden
van BC.

AM is de
zwaartelijn
vanuit A;

AD is de
hoogtelijn
vanuit A (op BC).
punt H is het hoogtepunt
van ΔABC en punt G is het
middelpunt van de omgeschreven cirkel
van ΔABC. Verder is K de loodrechte projectie van
H op de zwaartelijn AM en is punt N het snijpunt
van de zwaartelijn AM met die cirkel.

Te bewijzen: M is het midden van lijnstuk KN (ofwel: KM=MN).

Bewijs:
We kiezen de coördinaten van A; B en C slim: ditmaal **niet** (0,0) en (1,0) zoals zo vaak…..
(kan zo wel uitgewerkt worden, maar vergt meer uithoudingsvermogen en precisie!)
Voorstel is om dit keer punt **M als oorsprong** te kiezen!
Om precies te zijn: B(-1,0); C(+1,0) en A(a,b). (met uiteraard $b \neq 0$)
Waarom deze keuze? Wel: dan zal de vgl. van de zwaartelijn simpel zijn en óók die van de cirkel!

Verder zullen de punten K en N elkaars spiegelbeeld zijn in de puntspiegeling in punt (0,0) !!!!
Heb je de coördinaten van K eenmaal dan kun je die van N opstellen en invullen in de vgl van de cirkel!

We bepalen eerst de hoogtelijn uit C (loodrecht op AB):
… zoals steeds met de formule: $y - y_C = m \cdot (x - x_C)$ waarbij de richtingscoëfficiënt m voldoet aan:
$rc_{AB} \cdot m = -1 \ldots \quad rc_{AB} = \frac{b}{a+1}$ dus $m = -\frac{a+1}{b}$ en de vgl. van die
hoogtelijn uit C wordt dan: $y = -\frac{a+1}{b}(x-1)$

De hoogtelijn uit A is simpel: (de verticale lijn) $x = a$ en na invullen blijkt: H$(\boldsymbol{a}, \frac{\boldsymbol{1-a^2}}{\boldsymbol{b}})$
Merk op dat we helemaal geen voetpunt van die hoogtelijn uit C nodig hebben! Merk ook op dat dit alleen geldt indien $b \neq 0$, maar dat was aanname!

Nu "maken" we K. . . . we nemen de vgl. van lijn AM: $y = \frac{b}{a}x$ en snijden die met
de loodlijn vanuit H op AM: $y - \frac{1-a^2}{b} = -\frac{a}{b}(x-a)$ ofwel: $y = -\frac{a}{b}x + \frac{a^2}{b} + \frac{1-a^2}{b}$
. . . en vinden vlot: $\frac{b}{a}x + \frac{a}{b}x = \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{ab} \cdot x = \frac{1}{b}$ en
$x_K = \frac{a}{a^2+b^2}$ naast $y_K = \frac{b}{a^2+b^2}$ **Voorwaarde hierbij is wel $\boldsymbol{a \neq 0}$ . . .** zien we later!

Vervolgens blijkt N$(-\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2})$ ("puntspiegeling toegepast")

We gaan met het midden van AB: punt E$(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}b)$ de vgl. van de middelloodlijn van AB opstellen: $y - \frac{1}{2}b = -\frac{a+1}{b} \cdot (x - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2})$
De vgl. van de middelloodlijn van AB: $x = 0$ en invullen geeft:

$$y - \frac{1}{2}b = -\frac{a+1}{b} \cdot -\frac{1}{2}(a-1) \Leftrightarrow$$

$$y - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2-1}{b} \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2-1}{b} + \frac{1}{2}b$$ en er blijkt:

$$y_G = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+b^2-1}{b}$$

En hiermee is de vgl. van de cirkel $\boldsymbol{c}$ bepaald: $x^2 + (y - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+b^2-1}{b})^2 = r^2$

met $r^2 = MG^2 + MC^2$ (Pythagoras) en $r^2 = (\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+b^2-1}{b})^2 + 1$ (!)

De cirkelvgl. kan dus vereenvoudigd worden tot: $x^2 + y^2 - \frac{a^2+b^2-1}{b} \cdot y = 1$ (!!)

Een vluchtige controle om te zien of A(a,b) voldoet: $a^2 + b^2 - \frac{a^2+b^2-1}{b} \cdot b = 1$ (!!!)

De laatste stap is om te zien of punt N$(-\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2})$ ook voldoet…

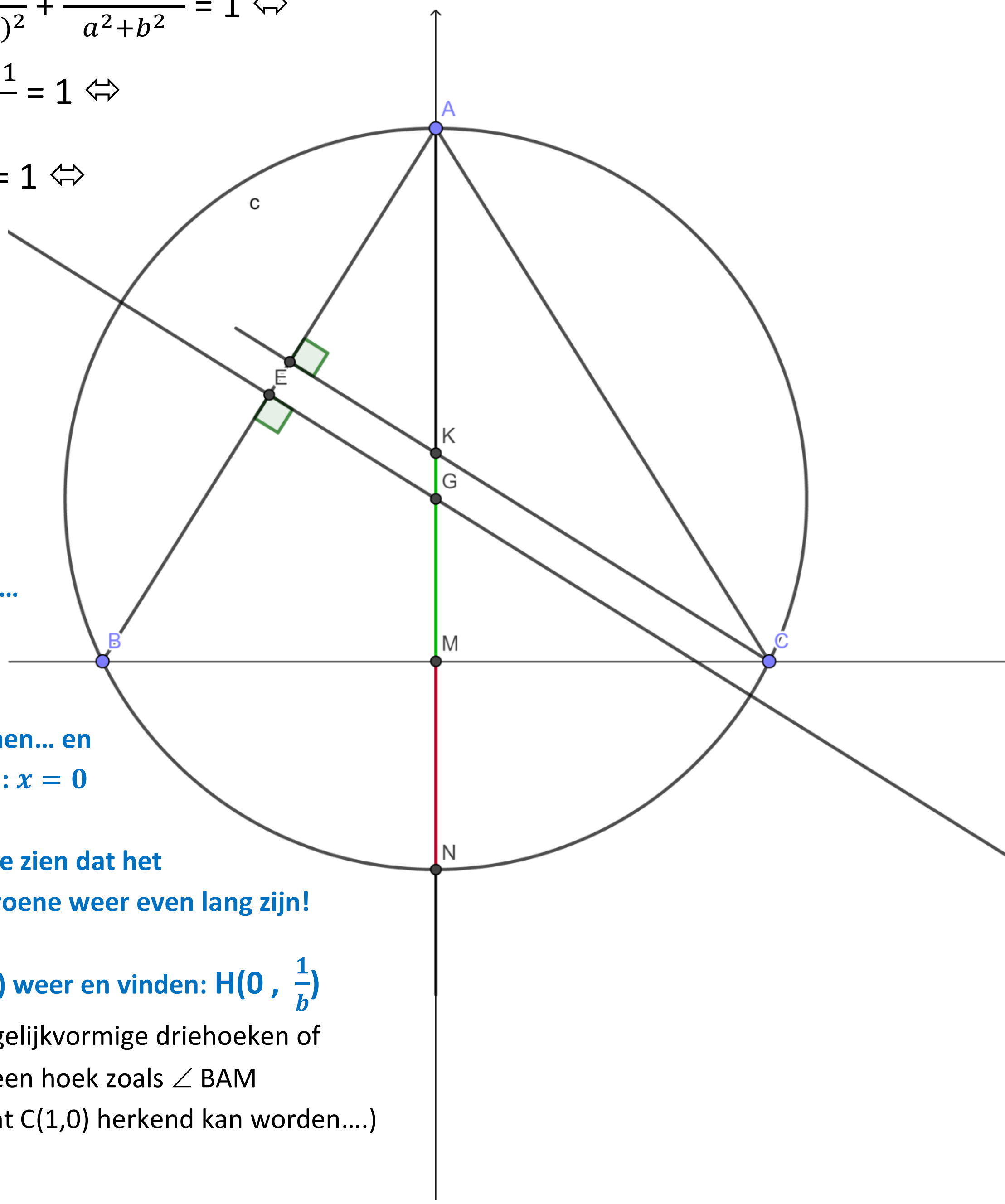
Welnu: $\left(-\frac{a}{a^2+b^2}\right)^2+\left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right)^2-\frac{a^2+b^2-1}{b}\cdot-\frac{b}{a^2+b^2}=1 \Leftrightarrow$

$\frac{\boldsymbol{a^2}}{(\boldsymbol{a^2+b^2})^2}+\frac{b^2}{(\boldsymbol{a^2+b^2})^2}+\frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2}=1 \Leftrightarrow$

$\frac{\boldsymbol{a^2+b^2}}{(\boldsymbol{a^2+b^2})^2}+\frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2}=1 \Leftrightarrow$

$\frac{\boldsymbol{1}}{a^2+b^2}+\frac{a^2+b^2\boldsymbol{-1}}{a^2+b^2}=1 \Leftrightarrow$

$$\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1$$



Wat als $a=0$?
Welnu: dan ligt punt A(0,b) op de y-as . . recht boven M en is de zwaartelijn tevens middelloodlijn… We zien dat in de figuur hiernaast:

Dan vallen H en K samen… en lijn AM heeft dan vgl.: $x=0$

Het is wel aardig om te zien dat het rode lijnstuk en het groene weer even lang zijn!

We maken H (ofwel K) weer en vinden: H(0 , $\frac{1}{b}$)

Maar dat kan ook via gelijkvormige driehoeken of met een tangens van een hoek zoals $\angle$ BAM (die even groot bij punt C(1,0) herkend kan worden….)

en dus N(0 , $-\frac{1}{b}$)

De berekening voor G blijft intact: G(0 , $\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2-1}{b}$)

net als de vgl. van c : $\quad x^2+y^2-\frac{b^2-1}{b}\cdot y=1$

en als men hier de coördinaten van N invult dan…wordt het verhaal gewoon saai!

Voor onze leerlingen in bijvoorbeeld 5VWO met wiskunde B is die laatste figuur helemaal niet saai, laat staan vanzelfsprekend; gewoon een leuke opgave!

Ton Raves

Teteringen augustus 2019