

Coördinaten na rotaties

www.raves.nl

Voordat we beginnen aan een poging om De Stelling van Torricelli cartesisch te bewijzen, eerst enkele observaties:

Bij rotaties om een punt (gemakshalve $O(0,0)$...) over 90° linksom geldt dat van een gegeven punt

$P(x, y)$ het beeldpunt is: $P'(-y, x)$ (en bij rotatie over 90° rechtsom: $P''(y, -x)$...)

Maar hoe zit dat bij rotaties over andere hoeken?

Bijvoorbeeld bij 60° linksom

Welnu:

$$R_{O,+60^\circ}(x, y) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot y, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot x\right)$$

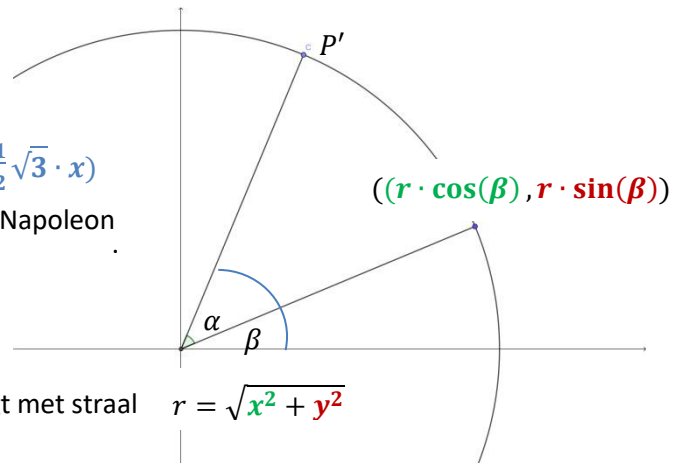
Dit zagen we al in het bewijs van de Stelling van Napoleon

Maar onmiddellijk dient zich de vraag aan:

waarom eigenlijk en ... bij andere hoeken?

Hoe dat zit wordt hieronder uitgelegd.

Gegeven een punt $P(x, y)$ dat op een cirkel ligt met straal $r = \sqrt{x^2 + y^2}$



en daarmee ook de hoek β vastlegt waaronder lijn OP de (positieve) x -as snijdt en er geldt:

$x = r \cdot \cos(\beta)$ en $y = r \cdot \sin(\beta)$ Dit lijkt op de coördinaten van een punt op de eenheidscirkel!

Wat zijn de beeld-coördinaten van punt $P(x, y)$ bij een rotatie over een hoek α (linksom) ?

Welnu: de bijbehorende hoek is $\alpha + \beta$ zoals je in de schets kunt zien....

Dus: $P'(r \cdot \cos(\alpha + \beta), r \cdot \sin(\alpha + \beta))$

We gebruiken nu twee bekende gonio-formules (die je bij het eindexamen VWO wiskunde B altijd gratis vooraf krijgt:)

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \text{ en}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

Daarmee worden de coördinaten: $P'(x \cdot \cos(\alpha) - y \cdot \sin(\alpha), x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha))$

Bij een rotatie over 30° (linksom) wordt: $P'\left(\frac{1}{2}x\sqrt{3} - \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\sqrt{3}\right)$

Bij rotatie over $+45^\circ$: $P'\left(\frac{1}{2}x\sqrt{2} - \frac{1}{2}y\sqrt{2}, \frac{1}{2}x\sqrt{2} + \frac{1}{2}y\sqrt{2}\right)$

En bij rotatie over 60° rechtsom: $R_{O,-60^\circ}(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\sqrt{3}, \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x\sqrt{3}\right)$

Tot slot bij rotatie over 90° rechtsom: $R_{-90^\circ}(x, y) = (y, -x)$

En daarmee kunnen we aan de slag met diverse bewijzen!

Teteringen januari 2020