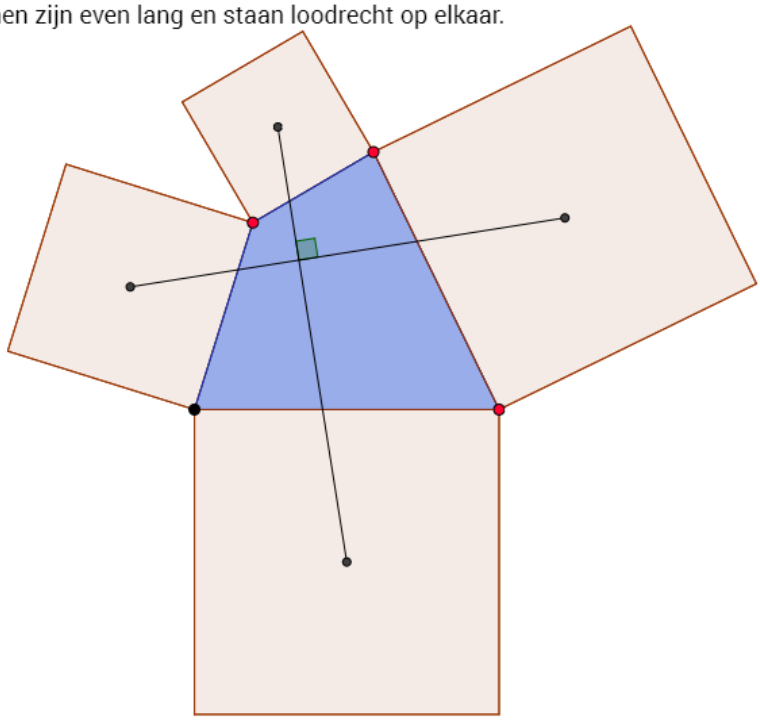
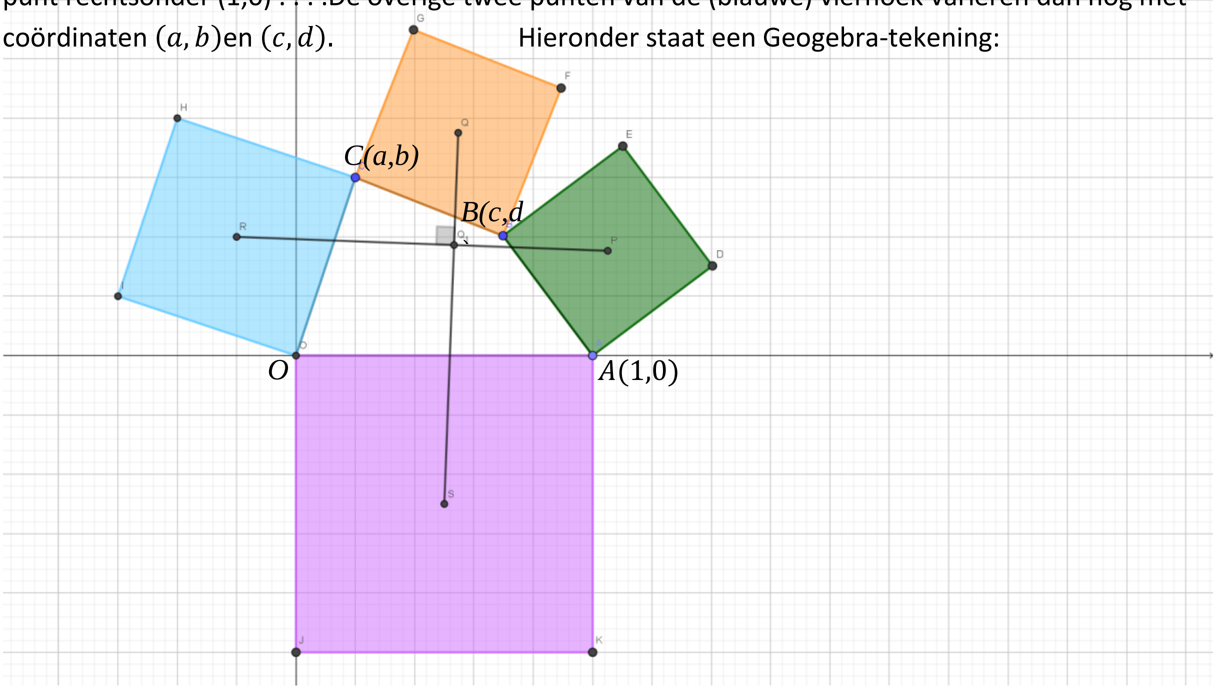
Stelling van H. H. van Aubel 1830-1906

Construeer in een vierhoek vierkanten op de zijden en verbind de tegenover elkaar liggende middelpunten. De verbindingslijnen zijn even lang en staan loodrecht op elkaar.



Als je naar het plaatje kijkt zie je de enorme gelijkenis met De Stelling van Napoleon!
Deze stelling staat ook als opgave in een 5VWO-wiskunde-boek (Getal&Ruimte 12e editie Hoofdstuk 10 opgave 25)!
Het idee van het bewijs is . . . . . . .Neem voor het punt links(onder) de oorsprong (0,0) en voor het punt rechtsonder (1,0) . . . .De overige twee punten van de (blauwe) vierhoek variëren dan nog met coördinaten (a, b)en (c, d). Hieronder staat een Geogebra-tekening:



Verder is P het midden van het groene vierkant; Q het midden van het gele vierkant; R het midden van het lichtblauwe vierkant en S die van het paarse vierkant.

Voor de coördinaten van de middens van de vierkanten zoeken we ons heil in VECTOREN (een "uitvinding" van de Ierse wiskundige William Rowan Hamilton in 1837) in plaats van coördinaten op te tellen en te verwisselen en zo……; dit maakt niet veel verschil…..

Wat wel enorm handig is bij vectoren is dat als je loodrechte vectoren wilt , je simpel inwendig verwisselt en van één het tegengestelde neemt!

Voorbeeld: vector $\binom{3}{4}$ staat loodrecht op vector $\binom{4}{-3}$
Het punt (3,4) dat aangewezen wordt door die eerste vector is a.h.w. RECHTSOM gedraaid over 90°.
En: vector $\binom{3}{4}$ staat ook loodrecht op vector $\binom{-4}{3}$ waarbij LINKSOM is gedraaid….

In het algemeen is met vector $\overrightarrow{OA}$ = $\vec{a}$ = $\binom{p}{q}$ de vector die RECHTSOM gedraaid is: $\vec{a}_R = \binom{q}{-p}$

en als je linksom draait krijg je: $\vec{a}_L = \binom{-q}{p}$.

Dit idee was Cartesius overigens wel bekend…. En als je alles met vergelijkingen van lijnen met richtingscoëfficiënten die een product: min één opleveren (voor die loodrechte stand) dan kom je er ook wel uit….. maar de "Ierse weg" is zoveel heerlijk korter!!!!

Kijk maar!

Het midden van het paarse vierkant is natuurlijk (simpel:) S$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. . . . . . MAAR kijk nog eens goed hoe je hier "op zijn Iers" aan gekomen bent: Je nam de helft van vector $\vec{a}$ + $\vec{a}_R$…

Vectoren optellen. . .. .(extra les….bij mijn gewaardeerde collega: klik maar op: http://www.hhofstede.nl/modules/vectoren.htm) …. is overigens ook al in de klas bij zowel wiskunde (B) als bij natuurkunde uitgelegd! . . . . .(bij wiskunde B in hoofdstuk 10 vanaf blz 83 van het boek van Getal en Ruimte). . . . . .
Maar dit principe volg je nu ook voor de andere middens: P, Q en R . . . . . .

Zo wordt: $\overrightarrow{AB} = \binom{c-1}{d}$ en $\overrightarrow{AB}_R = \binom{d}{1-c}$

en vector $\overrightarrow{OP}$ = $\vec{p}$ = $\binom{1}{0} + \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AB}\ + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}_R$

en zo wordt: $\overrightarrow{OR}$ = $\vec{r}$ =$\frac{1}{2}\ \overrightarrow{OC}\ + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}_L$

en $\overrightarrow{OQ}$ = $\vec{q}$ =$\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\ \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}_L$

Met $\vec{a}$=$\binom{1}{0}$; $A(1{,}0)$, $\vec{b} = \binom{c}{d}$; $B(c,d)$, en $\vec{c} = \binom{a}{b}$ dus $C(a,b)$ wordt dan

$$\overrightarrow{OP} = \binom{1}{0} + \frac{1}{2}\binom{c-1}{d} + \frac{1}{2}\binom{d}{1-c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}\binom{a}{b} + \frac{1}{2}\binom{-b}{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \end{pmatrix}$$

en $\overrightarrow{OQ} = \binom{a}{b} + \frac{1}{2}\binom{c-a}{d-b} + \frac{1}{2}\binom{b-d}{c-a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}d \\ -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}d} \\ \boldsymbol{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}d} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d} \\ \boldsymbol{\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}d} \end{pmatrix}$$

Merk nu op dat de rode stukken identiek zijn en het groene deel het tegengestelde is van het paarse!

dus $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{QS}$ en de lengten zijn ook gelijk: $PR = QS$

Als laatste een interactieve link naar het Geogebra-plaatje waarin je kunt schuiven met B en C. . . . .

https://www.geogebra.org/m/gXgacY8B

Teteringen

november 2017