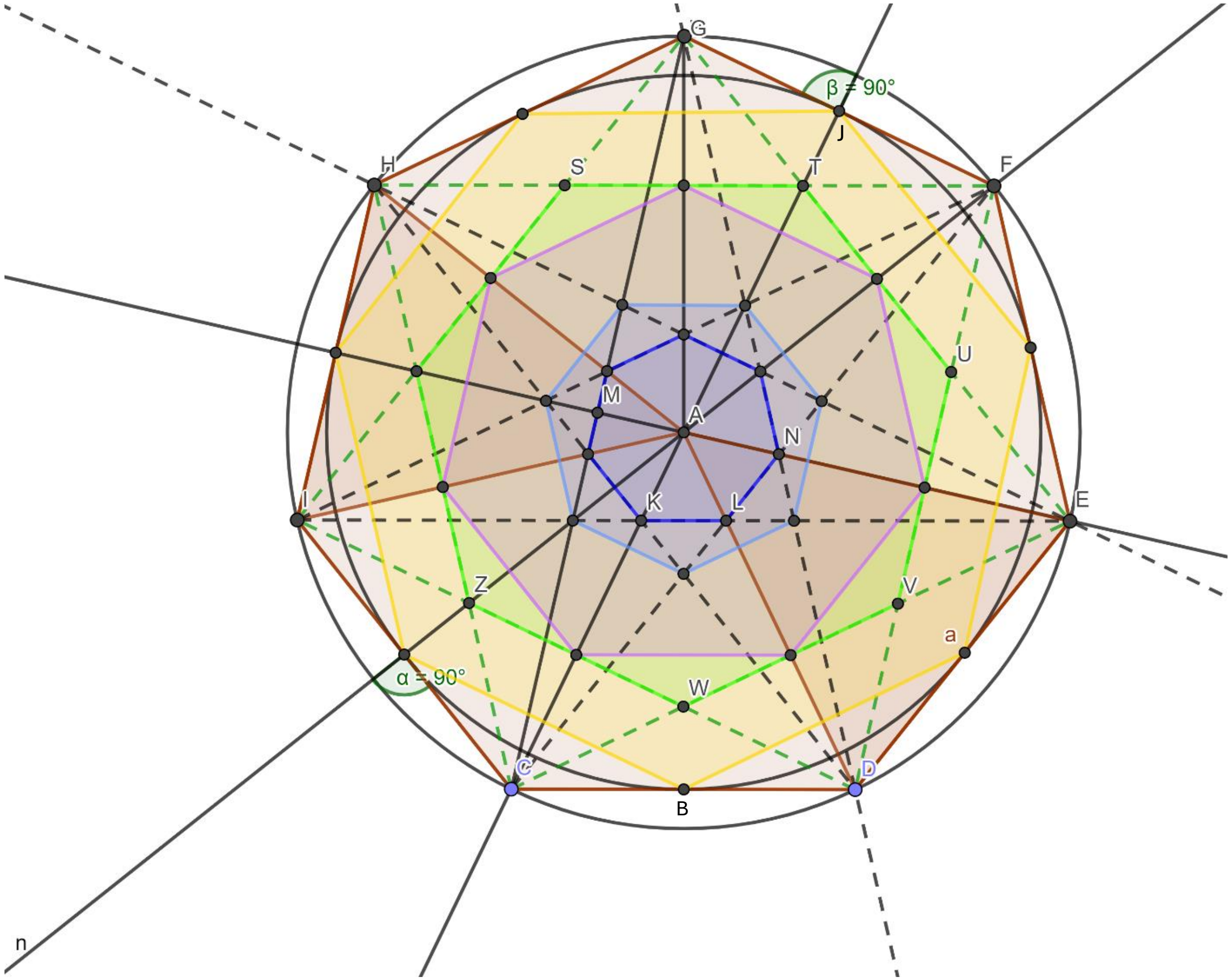
De Regelmatige Zevenhoek.



Hierboven in volle glorie met diagonalen en lijnen die wéér zevenhoeken vormen.

We gaan er eens aan rekenen zoals **ook bij de regelmatige vijfhoek**.

Met eenzelfde uitgangspunt, namelijk:

een eenheidscirkel die inwendig raakt aan de omgeschreven cirkel van de zevenhoek.

Zo is onderin een horizontaal lijnstuk CD, dat raakt aan de eenheidscirkel.
Hierboven is AB = 1 (met A het middelpunt van de cirkels) en (helaas) is lijnstuk BC zowel als BD nog onbekend , laten we die stellen op $\boldsymbol{a}$**.**

Dan is de straal van de omgeschreven cirkel $\sqrt{\boldsymbol{a^2+1}}$ en van de zevenhoek $CDEFGHI$ zijn "bekend":

$C(-a,-1); D(a,-1); G(0,\sqrt{a^2+1})$.

We "maken" nu de punten E en F...

E door een cirkeltje met straal $\boldsymbol{2a}$ en middelpunt $D(a,-1)$te snijden

met $\boldsymbol{x^2+y^2=a^2+1}$ **(1)** (de omgeschreven cirkel)

dus met $(x-a)^2+(y+1)^2=4a^2$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{x^2}-2ax+a^2+\boldsymbol{y^2}+2y+1=4a^2$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{a^2+1-2ax+a^2+2y+1=4a^2}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\ldots} \Leftrightarrow \boldsymbol{y=ax+a^2-1}$ **(2)**

Dit gaan we invullen in **(1)**

En we krijgen: $x^2+a^2x^2+2a(a^2-1)x+(a^2-1)^2=a^2+1$

$\Leftrightarrow (a^2+1)x^2+2a(a^2-1)x+a^4-2a^2+1=a^2+1$

$\Leftrightarrow (a^2+1)x^2+2a(a^2-1)x+a^4-3a^2=0$

$D=4a^2(a^2-1)^2-4(a^2+1)(a^4-3a^2)$

$=4a^2\{(a^2-1)^2-(a^2+1)(a^2-3)\}=4a^2\{a^4-2a^2+1-[a^4-2a^2-3]\}$

$=\cdots=\boldsymbol{16a^2}$. **En dit is HEEL OPMERKELIJK**!!!!

Dus de oplossingen zijn: $x_D=\frac{-2a(a^2-1)-4a}{2(a^2+1)}=\frac{-2a^3-2a}{2(a^2+1)}=\ldots-a$ (klopt)

en ... $\boldsymbol{x_E}=\frac{-2a(a^2-1)+4a}{2(a^2+1)}=\frac{-2a^3+6a}{2(a^2+1)}=\boldsymbol{\frac{a(3-a^2)}{a^2+1}}$ en $\boldsymbol{y_E}=\frac{a^2(3-a^2)}{a^2+1}+\boldsymbol{a^2-1}=\boldsymbol{\frac{3a^2-1}{a^2+1}}$

$$\boldsymbol{E\left(\frac{a(3-a^2)}{a^2+1},\frac{3a^2-1}{a^2+1}\right)}$$

Punt $\boldsymbol{F}$ is het spiegelbeeld van punt $\boldsymbol{G}$ (bovenin) t.o.v. lijn $\boldsymbol{AC}$: $y = \frac{1}{a}x$ en het punt op de eenheidscirkel:

J dat daarbij hoort wordt bepaald door $x^2 + y^2 = 1$ en geeft:

$x^2 + \left(\frac{1}{a}x\right)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2}{a^2+1}$ en $x = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ en met $(a > 0)$ $x_J = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ volgt $y_J = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$

Punt F ligt twee keer zo ver weg… dus: $\boldsymbol{x_F} = \frac{\boldsymbol{2a}}{\sqrt{\boldsymbol{a^2+1}}}$ en m.b.v. ${x_F}^2 + {y_F}^2 = a^2 + 1$ volgt:

${y_F}^2 = a^2 + 1 - \frac{4a^2}{a^2+1} = \cdots = \frac{a^4-2a^2+1}{a^2+1} = \frac{(1-a^2)^2}{a^2+1}$ dus $\boldsymbol{y_F} = \frac{\boldsymbol{1-a^2}}{\sqrt{\boldsymbol{a^2+1}}}$

Kortom: $\boldsymbol{F} = \left(\frac{\boldsymbol{2a}}{\sqrt{\boldsymbol{a^2+1}}}, \frac{\boldsymbol{1-a^2}}{\sqrt{\boldsymbol{a^2+1}}}\right)$

Nu moet er voor die waarde $\boldsymbol{a}$ gelden dat de lengte van lijnstuk $\boldsymbol{EF}$ gelijk is aan $\boldsymbol{2a}$.

We proberen: $(\boldsymbol{x_E} - \boldsymbol{x_F})^2 + (\boldsymbol{y_E} - \boldsymbol{y_F})^2 = \boldsymbol{4a^2}$

$$\left(\frac{\boldsymbol{a(3-a^2)}}{\boldsymbol{a^2+1}} - \frac{\boldsymbol{2a}}{\sqrt{\boldsymbol{a^2+1}}}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{3a^2-1}}{\boldsymbol{a^2+1}} - \frac{\boldsymbol{1-a^2}}{\sqrt{\boldsymbol{a^2+1}}}\right)^2 = \boldsymbol{4a^2}$$

DIT is de vergelijking waar een REGELMATIGE ZEVENHOEK aan moet voldoen!

DE VRAAG is of dat wel (opgelost) kan (worden) … (bij de vijfhoek lukte dat wel….)

We doen een poging: de groene termen maken we gelijknamig door “boven en onder “ te vermenigvuldigen met $\sqrt{\boldsymbol{a^2+1}}$

en krijgen: $\left(\frac{\boldsymbol{a(3-a^2)}}{\boldsymbol{a^2+1}} - \frac{\boldsymbol{2a\sqrt{a^2+1}}}{\boldsymbol{a^2+1}}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{3a^2-1}}{\boldsymbol{a^2+1}} - \frac{\boldsymbol{(1-a^2)\sqrt{a^2+1}}}{\boldsymbol{a^2+1}}\right)^2 = \boldsymbol{4a^2}$

$\Leftrightarrow \left(\boldsymbol{a(3-a^2)} - \boldsymbol{2a\sqrt{a^2+1}}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{3a^2-1}}{\boldsymbol{1}} - \frac{\boldsymbol{(1-a^2)\sqrt{a^2+1}}}{\boldsymbol{1}}\right)^2 = \boldsymbol{4a^2(a^2+1)^2} \Leftrightarrow$

Hierna gaan we verder in afdrukstand “landscape” (liggend) vanwege de lange regels

$(a^2(3-a^2)^2 - 4a^2(3-a^2)\sqrt{a^2+1} + 4a^2(a^2+1) + (3a^2-1)^2 - 2(3a^2-1)(1-a^2)\sqrt{a^2+1} + (1-a^2)^2(a^2+1) = 4a^2(a^2+1)^2$

$a^6 - 6a^4 + 9a^2 + 4a^4\sqrt{a^2+1} - 12a^2\sqrt{a^2+1} + 4a^4 + 4a^2 + 9a^4 - 6a^2 + 1 - 2(-3a^4+4a^2-1)\sqrt{a^2+1} + (1-2a^2+a^4)(a^2+1) =$

$a^6 + 7a^4 + 7a^2 + 1 + 4a^4\sqrt{a^2+1} - 12a^2\sqrt{a^2+1} + 6a^4\sqrt{a^2+1} - 8a^2\sqrt{a^2+1} + 2\sqrt{a^2+1} + a^6 - a^4 - a^2 + 1 = 4a^2(a^2+1)^2 =$

$a^6 + 7a^4 + 7a^2 + 10a^4\sqrt{a^2+1} - 20a^2\sqrt{a^2+1} + 2\sqrt{a^2+1} + a^6 - a^4 - a^2 + 2 = 4a^6 + 8a^4 + 4a^2$

$10a^4\sqrt{a^2+1} - 20a^2\sqrt{a^2+1} + 2\sqrt{a^2+1} = 2a^6 + 2a^4 - 2a^2 - 2$

$2\cdot(5a^4 - 10a^2 + 1)\cdot\sqrt{a^2+1} = 2a^6 + 2a^4 - 2a^2 - 2$

$(5a^4 - 10a^2 + 1)\cdot\sqrt{a^2+1} = a^6 + a^4 - a^2 - 1 = (a^2+1)\cdot(a^4-1)$ **(kwadrateren *)** ***(I)***

$(5a^4 - 10a^2 + 1)^2(a^2+1) = (a^2+1)^2\cdot(a^4-1)^2$

$(5a^4 - 10a^2 + 1)^2 = (a^2+1)\cdot(a^4-1)^2$

$25a^8 - 100a^6 + 110a^4 - 20a^2 + 1 = (a^2+1)\cdot(a^8 - 2a^4 + 1)$

$25a^8 - 100a^6 + 110a^4 - 20a^2 + 1 = a^{10} + a^8 - 2a^6 - 2a^4 + a^2 + 1$

$a^{10} - 24a^8 + 98a^6 - 112a^4 + 21a^2 = 0$

$a^2 = 0$ v $a^8 - 24a^6 + 98a^4 - 112a^2 + 21 = 0$

$a^2 = 0$ v $(a^2-3)\cdot(a^6 - 21a^4 + 35a^2 - 7) = 0$

Stel $a^2 = b$ **dan :** $b^3 - 21b^2 + 35b - 7 = 0$

Tja hoe lost men ook alweer een derdegraads vergelijking op?

$x^3 - 21x^2 + 35x - 7 = 0$ **met** $a = -21$ **b = 35 en c = −7**

omdat een derdemacht van $a+b$ **altijd iets oplevert in de vorm:** $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ **vervangen we** x **door** $y+7$

en krijgen: $(y+7)^3 - 21(y+7)^2 + 35(y+7) - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$y^3 + 21y^2 + 147y + 343 - 21y^2 - 294y - 1029 + 35y + 245 - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$y^3 + 343 + 147y - 294y - 1029 + 35y + 245 - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$y^3 + 343 + 147y - 294y - 1029 + 35y + 238 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$y^3 + 343 + 147y - 294y - 1029 + 35y + 238 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$y^3 - 294y + 147y - 1029 + 35y + 581 = 0$

$y^3 - 294y + 147y - 1029 + 35y + 581 = 0$

$y^3 - 294y + 147y + 35y - 448 = 0$

$y^3 - 112y - 448 = 0$

Wat ook opvalt is dat 112 is: 16 keer 7 en 448 is: 64 keer 7 en nemen we nu voor $y = 4z$ dan vinden we:

$64z^3 - 64 \cdot 7z - 64 \cdot 7 = 0 \;\Leftrightarrow\; z^3 - 7z - 7 = 0$

en we hebben nu een vorm: $z^3 + pz + q = 0$ met $p = -7$ en $q = -7$

Dat getal 7 is de "sleutel" in de vergelijking bij onze zeven-hoek! En die vergelijking: $z^3 - 7z = 7$ is duidelijk geen toeval!

Dit noemden 16e-eeuwse geleerden als Del Ferro; Tartaglia en Cardano een "gereduceerde vergelijking"...

Bij een regelmatige vijfhoek moeten punten E en F identiek zijn en krijg je: $E\left(\frac{a(3-a^2)}{a^2+1}, \frac{3a^2-1}{a^2+1}\right) = F\left(\frac{2a}{\sqrt{a^2+1}}, \frac{1-a^2}{\sqrt{a^2+1}}\right)$

$$\frac{a(3-a^2)}{a^2+1} = \frac{2a}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{2a}{\sqrt{a^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}}$$

dus $a(3-a^2) = 2a\sqrt{a^2+1}$ $3 - a^2 = 2\sqrt{a^2+1}$ (II)

en analoog: $3a^2 - 1 = (1-a^2)\sqrt{a^2+1}$ (III)

Uit (II) volgt: $\sqrt{a^2+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}a^2$ dit nu invullen in (III) geeft: $3a^2 - 1 = (1-a^2)(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}a^2)$

$$6a^2 - 2 = (1-a^2)(3-a^2)$$

$$a^4 - 4a^2 + 3 = 6a^2 - 2$$
$$a^4 - 10a^2 + 5 = 0$$

$z^2 - 10z + 5 = 0$ ... en dat is o.a. bij: $z = \frac{10 \pm \sqrt{80}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{10 \pm 4\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow z = 5 \pm 2\sqrt{5}$

De waarde voor a die (wel) voldoet is $a = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$ en de straal van de omgeschreven cirkel wordt daarmee:

$\sqrt{a^2+1} = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$ en omdat $6 - 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} - 1)^2$ ... (kijk elders op de website... bij ... een vijfhoek)

wordt de straal van de cirkel waar de vijf hoekpunten op liggen **simpel** (en construeerbaar) : $\sqrt{5} - 1$

Tot mijn verbazing hebben wiskundigen van heel veel eeuwen geleden, zoals Euclides dit ook gezien!

Maar tot mijn schrik krijgen we bij de zevenhoek geen enkel houvast!

(*) probeer je $a^2 + 1$ te vervangen door c^2 dan krijg je in (I) een vervelende vijfdegraads vergelijking:

... zoiets als $c^5 - 5c^4 - 2c^3 + 20c^2 - 16 = 0$ en dat schiet niet op! $a^2 - 1$ vervangen door c^2 mag niet...

Bij een ZEVENHOEK moest de afstand tussen die punten E en F gelijk zijn aan $2a$ ....
dit resulteerde in:

$(5a^4 - 10a^2 + 1) \cdot \sqrt{a^2+1} = a^6 + a^4 - a^2 - 1 = (a^2+1) \cdot (a^4 - 1) = (a^2+1) \cdot (a^2+1)(a^2-1)$ **en op pagina 4 zag je de overgangen naar:**
(via o.a. kwadrateren)

$a^{10} - 24a^8 + 98a^6 - 112a^4 + 21a^2 = 0$

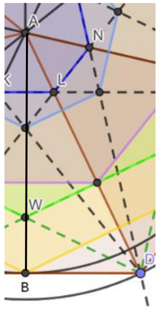
$a^2 = 0$ v $(a^2 - 3) \cdot (a^6 - 21a^4 + 35a^2 - 7) = 0$

dus: $(a^6 - 21a^4 + 35a^2 - 7) = 0$ **en met** $a^2 = x$ **:** $x^3 - 21x^2 + 35x - 7 = 0$ **(later dus** $a = \sqrt{x}$ **)**

en de omzetting: $x = y + 7$ **:** $y^3 - 112y - 448 = 0$
en tenslotte met $y = 4z$ **:** $z^3 - 7z - 7 = 0$

Dit is een derdegraads (**) vergelijking met 3 oplossingen (voor z) waarvan we de kleinste zoeken...
Helaas betreft dit geen (middelbare) schoolwiskunde... en bevat derdemacht wortels en/of uitdrukkingen met arcsinus (***)
Een formule (van bijv. Cardano) helpt ook niet want die geeft alleen de grootste waarde volgens een formule,
die men op de universiteit soms tegenkomt, maar die hier NIET werkt.

Het is ook beslist niet meer met passer en liniaal (juist vanwege die derdemacht wortels *) te construeren.**
Een benadering met/van de computer dan maar?



$z \approx -1{,}692021472 \ldots\ldots$ $y \approx -6{,}7688085887 \ldots\ldots$ $x = y + 7 \approx 0{,}2319141135 \ldots\ldots$

$x = a^2$ **en met** $a = \sqrt{x}$ **.. uiteindelijk:** $a \approx 0{,}48157461880752864433216235 3\ldots$
Tja, dat getal a is dat niet gewoon de tangens van hoek BAD ? En die bedraagt in graden ("degrees"):
$\angle$ **BAD =** $\frac{360}{14} = \frac{180}{7}$ **en** $tan \angle$ **BAD** $\approx 0{,}4815746188 \ldots$
Hier laten we het even bij....
Er is, echter helaas, duidelijk geen constructie (met passer en liniaal) voor een regelmatige zevenhoek mogelijk.

Het enige dat wij bereikt hebben is die vgl. : $z^3 - 7z = 7$
Als je toch een vervolg hebt (kunnen vinden): ... graag een e-mailtje! (ton@raves.nl)
Teteringen augustus 2024