www.raves.nl
ton@raves.nl

DE ZWAARTELIJNSTELLING IN EEN DRIEHOEK

LUIDT:

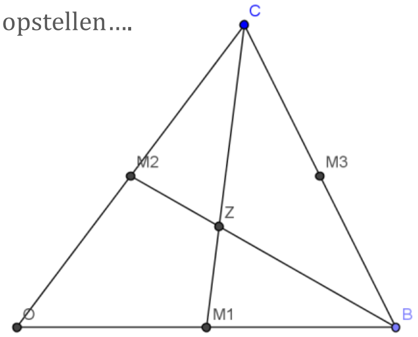
In een driehoek zullen de drie zwaartelijnen elkaar precies in één punt (het “zwaartepunt”) snijden en ze verdelen elkaar in stukken die zich verhouden als 1:2.

IDEE VAN HET BEWIJS

We kiezen net als bij de hoogtelijnenstelling een assenstelsel zo dat voor de driehoek de hoekpunten zijn: O(0,0) in plaats van A; verder $B(1{,}0)$ en punt $C(r, ar)$ op een lijn door de oorsprong met vergelijking $y = ax$ met $a \neq 0$
Mocht punt C zich op een verticale lijn door O (de y-as dus) bevinden dan dienen we het bewijs aan te passen met *C(0, r)*.... Hierover verderop meer . . .
We stellen vergelijkingen op van de eerste twee zwaartelijnen; combineren die en lossen de vergelijkingen op zodat het snijpunt Z uitgedrukt is in a en r .
Vervolgens kijken we of dit snijpunt op de derde zwaartelijn ligt.

REGULIERE GEVAL

Eerst maar eens de middens M_1; M_2 en M_3 van de zijden OB; OC en BC maken…en de vergelijkingen van de zwaartelijnen opstellen….
Zie figuur



Zwaartelijn nummer 1 door $M_1(\frac{1}{2}, 0)$ en $C(r, ar)$

$$y = \frac{ar}{r-\frac{1}{2}} \cdot (x - \frac{1}{2})$$

Zwaartelijn nr 2 door $M_2(\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}ar)$ en $B(1{,}0)$

$$y = \frac{\frac{1}{2}ar}{\frac{1}{2}r-1} \cdot (x-1)$$

of ietsje vereenvoudigd: $y = \dfrac{ar}{r-2} \cdot (x-1)$

Nu gelijkstellen: $\dfrac{ar}{r-\frac{1}{2}} \cdot (x - \frac{1}{2}) = \dfrac{ar}{r-2} \cdot (x-1)$

Links en rechts delen door: ar *(* dit mag want* $a \neq 0$ *en* $r \neq 0$*)*

geeft : $\dfrac{1}{r-\frac{1}{2}} \cdot x - \dfrac{\frac{1}{2}}{r-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{r-2} \cdot x - \dfrac{1}{r-2}$ *nu alle x-termen naar links:*

en de getallen naar rechts: $\left(\dfrac{1}{r-\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{r-2}\right) \cdot x = \dfrac{\frac{1}{2}}{r-\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{r-2}$

gelijknamig maken: $\dfrac{r-2-r+\frac{1}{2}}{(r-\frac{1}{2})\cdot(r-2)} \cdot x = \dfrac{\frac{1}{2}r-1-r+\frac{1}{2}}{(r-\frac{1}{2})\cdot(r-2)}$ *en vereenvoudigen:*

mits $r \neq \frac{1}{2}$ en mits $r \neq 2$ (**) : $-\frac{3}{2}x = -\frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$ dus: $x = \frac{1}{3}r + \frac{1}{3}$
Voorwaar een hele mooie waarde; er zit geen a in en het oogt bijzonder simpel!

Nu de y-coördinaat van Z maken: $y = \dfrac{\frac{1}{2}ar}{\frac{1}{2}r-1} \cdot (\frac{1}{3}r + \frac{1}{3} - 1) = \ldots\ldots = \ldots = \frac{1}{3}ar$!!!!

Je voelt dat het klopt en dat de stukken zich als $\frac{1}{3}$ deel en $\frac{2}{3}$ deel gaan verhouden.

DERDE ZWAARTELIJN	We hebben de makkelijkste zwaartelijn voor het laatst bewaard; die door O(0,0) en $M_3(\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}ar)$ Deze heeft vergelijking: $\boldsymbol{y = \frac{\frac{1}{2}ar}{\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}} \cdot x}$ (mits.... ***) Tja wat is er aan de hand als die noemer nul dreigt te worden? (later!)
INVULLEN	$y = \frac{\frac{1}{2}ar}{\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}} \cdot (\frac{1}{3}r + \frac{1}{3}) = \ldots = \ldots\ldots\ldots = \frac{1}{3}ar$ (nu verdwijnt een r +1)... Z ligt op de 3e zwaartelijn!
TWEEDE DEEL	Aan de coördinaten zie je al een en ander.... We kijken eens naar de lengte van OZ die is $\sqrt{(\frac{1}{3}r + \frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3}ar)^2} =$ $\frac{1}{3}\sqrt{(r+1)^2 + (ar)^2}$ En de lengte van M_3Z is $\sqrt{(\frac{1}{2}r + \frac{1}{2} - (\frac{1}{3}r + \frac{1}{3}))^2 + (\frac{1}{2}ar - \frac{1}{3}ar)^2} = \frac{1}{6}\sqrt{(r+1)^2 + (ar)^2}$ en die stukken verhouden zich inderdaad als 2 : 1 Ik laat het aan de lezer over om de andere stukken eens uit te drukken in r en a en te verifieren dat ook daar de verhouding van 2 : 1 geldt.
DE MITSEN	Als C op de y-as ligt en coördinaten heeft zoals (0,r), dan is $M_2(0, \frac{1}{2}r)$ Zwaartelijn nummer 1 door C(0,r) en $M_1(\frac{1}{2}, 0)$ wordt dan $y = \frac{r}{-\frac{1}{2}} \cdot (x - \frac{1}{2})$ of eenvoudiger: $y = -2r \cdot (x - \frac{1}{2})$ Zwaartelijn nr 2 wordt dan: $y = -\frac{1}{2}r \cdot (x-1)$ gelijkstellen geeft dan: $-2rx + r = -\frac{1}{2}rx + \frac{1}{2}r$ dus: $x = \frac{1}{3}$ dat was te verwachten .... en de y-coördinaat is dan: $y = \frac{1}{3}r$ De derde zwaartelijn door O(0,0) en $M_3(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}r)$: $y = rx$ (zonder de halfjes) gaat overduidelijk door Z. Als in het reguliere geval geldt $r = \frac{1}{2}$ wat dan? Tja, dan loopt de 1e zwaartelijn verticaal en heeft vergelijking: $x = \frac{1}{2}$ Reken maar na dat het zwaartepunt Z dan wordt: $Z(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}a)$ ..... Als in het reguliere geval geldt: r = 2 (**) Wat dan? Dan loopt de 2e zwaartelijn verticaal Dit laat ik aan de lezer over! Net als de situatie waarbij $r = -1$ (***) dan loopt de 3e zwaartelijn verticaal.... Omwille van de leesbaarheid laten we het echter hier bij. Er is een Cartesisch bewijs geleverd!